I. NÚMEROS COMPLEJOS

1. Comprobar que
    a. $(\sqrt{3}-2i)-i(2-\sqrt{3}i)=4$
    b. $(1-i)^6=8i$
2. Escriba el número complejo dado en la forma $a+ib$
    a. $3i+\frac{1}{2-i}$
    b. $(2+3i)\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$
3. Suponga que el producto $z_1 \cdot z_2$ de dos números complejos es una constante real diferente de cero. Demuestre que $z_2 = k\overline{z_1}$, donde k es un número real.
4. Demuestre que $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,Re(z_1\bar{z}_2)$
5. Verificar que $\overline{(z^4)} = (\bar{z})$, usando la propiedad $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\overline{z_2}$
6. Hallar todas las raíces en coordenadas rectangulares
    a. $(2i)^{\frac{1}{2}}$
    b. $(-8-8\sqrt{3}i)^{1/4}$
7. Hallar un valor de arg (z) para
    a. $z=\frac{i}{-2-2i}$
    b. $z=(\sqrt{3}-i)^6$
8. Demostrar que si $Re(z_1), Re(z_2) > 0$ Entonces $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$
9. Probar que $\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)| + |Im(z)|$
10. Demostrar $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$
11. Demuestre que si z está en el círculo $z = |2|$ entonces: $\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right| \leq \frac{1}{3}$
12. Demostrar que la ecuación $|z-z_0| = R$ del círculo con centro en z_0 y radio R, se puede escribir de la siguiente forma

$$|z|^2 - 2\,Re(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$$

13. Usar la fórmula de De Moivre para deducir las siguientes igualdades
    a. $cos\, 3\theta = cos^3\theta - 3\cos\theta\, sin^2\theta$
14. Comprobar que $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$
15. Comprobar que $(-1+i)^7 = -8(1+i)$
16. Hallar las cuatro raíces de la ecuación $z^4+4=0$ y usarlas para factorizar z^4+4 en factores cuadráticos con coeficientes reales.
17. Sea $z \in \mathbb{C}; z \neq 1, n \in \mathbb{N}$, demuestre que:

$$1+z+z^2+\cdots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

18. Probar que si C es cualquier raíz n-ésima de la unidad, entonces:

$$1 + C + C^2 + \cdots + C^{n-1} = 0$$

19. Demostrar que el siguiente conjunto es abierto:

$$S = \{z \in \mathbb{C}: -1 < Im(z) < 3\}.$$

20. Sea $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$. Encontrar:
    a. $\mathrm{Arg(z)}$.
    b. $\arg(z)$.
    c. Forma polar.
    d. Forma exponencial.

21. Encontrar las raíces de $z = (-1+i)^{\frac{1}{3}}$.

II. FUNCIONES ANALÍTICAS.

1. Describir, para la función $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$, su dominio justificando el porqué del conjunto solución.
2. Expresar la función $f(z)=z^3+z+1$ en la forma $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
3. Escriba la función $f(z)=z+\frac{1}{z}; z\neq 0$, en la forma $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$.
   Hint: Utilice la forma polar $z=re^{i\theta}$ en conjunto con la identidad de Euler.
4. *Esboce el dominio de la función dada:*
   a) $f(z)=\frac{1}{|z-i|-1}$
   b) $f(z)=\frac{2-z}{z-\bar{z}}$
5. *Demuestre los siguientes límites utilizando la definición.*
   a) $\lim\limits_{z\to 1}\left(\frac{iz}{2}\right)=\frac{i}{2}$.
   b) $\lim\limits_{z\to i}\left(\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}\right)=4+4i$.
   c) $\lim\limits_{z\to 1}(z^2-z+4)=4$.
   d) $\lim\limits_{z\to z_0} Re(z)=Re(z_0)$.
   e) $\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z}=\overline{z_0}$.
   f) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{\bar{z}^2}{z}\right)=0$.
6. Calcule los siguientes límites usando los teoremas.
   a) $\lim\limits_{z\to i}(2z^2-3z+8)$.
   b) $\lim\limits_{z\to -2i}\left(\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}\right)$.
   c) $\lim\limits_{z\to 2e^{\frac{i\pi}{3}}}\left(\frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}\right)$.
   d) $\lim\limits_{z\to 1}\left(\frac{z+3}{z^3+2z^2-z-2}\right)$.
   e) $\lim\limits_{z\to \infty}\left(\frac{2z^2-5}{z^2+8z-1}\right)$.
7. Mostrar que $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{1}{z}\right)=\infty$ y que $\lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{1}{z}\right)=0$. Puede hacer uso de los teoremas.
8. Sea $f(z)=\begin{cases}\frac{z^2+4}{z-2i};\ z\neq 2i\\ 3+4i;\ z=2i\end{cases}$:
   a) ¿Es continua en $z_0=2i$?
   b) ¿Es continua en $z_0\neq 2i$?
   c) Redefina la función de forma que sea continua en todo z_0.
9. Sea $f(z)=\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$, ¿es continua en $z=i$? En caso de que no lo sea, redefina la función de forma que sí lo sea.
10. Determine los puntos en donde es analítica la función:
   a) $f(z)=(x+\sin(x)\cosh(y))+i(y+\cos(x)\sinh(y))$

b) $f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln(r)) + ie^{-\theta}\sin(\ln(r))$

11. Si $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, encuentre $v(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica en un dominio D.
12. Sea $u(x,y) = e^{-x}\big(xsin(y) - ycos(y)\big)$:
    a) ¿Es una función armónica?
    b) Encuentre $v(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea una función analítica.
13. Sea $f(z) = \frac{1}{z}$:
    a) Demostrar por definición en qué puntos es diferenciable y obtener su derivada.
    b) Determine dónde la función es analítica y dónde no lo es. Justifique.
14. Sea $f(z) = \bar{z}$. Demuestre por definición que no es diferenciable.
15. Considere $f(z) = z - \bar{z}$. Utilizando los teoremas de Cauchy-Riemman determine dónde es diferenciable.
16. Encuentre la imagen del conjunto bajo la función dada:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : Re(z) = -\frac{5\pi}{6} \right\} \; bajo \; f(z) = \cos(z).$$

III. FUNCIONES ELEMENTALES.

1. Probar que $e^{(2 \pm 3\pi i)} = -e^2$.
2. Encuentre z en los complejos que satisfaga la ecuación dada
   a) $e^z = -2$
   b) $e^{z-1} = -ie^3$
   c) $\cos(z) = \sqrt{2}$
   d) $|tan(z)| = 1$
3. Demostrar $\frac{d}{dz} e^{az} = ae^{az}$, donde a es una constante arbitraria.
4. Demostrar $\frac{d}{dz} \ln\big(f(z)\big) = \frac{f'(z)}{f(z)}$
5. Encuentre el valor de i^i, ¿Tiene algún sentido este resultado dentro de los números reales?
6. Utilice el resultado anterior para hallar el valor de $\sqrt[i]{i}$
7. Encuentre el valor principal de $(1-i)^{4i}$
8. Determine si $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2} = z^{\alpha_1 \alpha_2}\ \forall z, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Si es cierto, demuéstrelo, si no, de un contra ejemplo.
9. Encontrar las siguientes derivadas
   a. $cos^2(2z+3i)$
   b. $ctg(z)$
   c. $(z-3i)^{4z+2}$
   d. $\operatorname{csch}(z)$
10. Encuentre los puntos donde la siguiente función es derivable. Justifique
$$w = \frac{z^2 e^z}{z^3 - 1}$$
11. Para $f(z) = \coth(z)$, obtener
    a. Dominio
    b. Continuidad
    c. Diferenciabilidad
12. Determine todos los valores de z que satisfacen las ecuaciones dadas
    a. $cosh(z) = i$
    b. $sinh(z) = -1$
    c. $sinh(z) = cosh(z)$
    d. $sinh(z) = e^z$
13. Demostrar que
    a. $sinh(z+\pi i) = -senh(z)$
    b. $\tanh(z+\pi i) = \tanh(z)$
14. Demostrar las siguientes identidades
    a. $senh(z_1+z_2) = senh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\,senh(z_2)$
    b. $\ln(z_1 z_2 = \ln(z_1) + \ln(z_2)$
    c. $\ln(e^z)\ no\ siempre\ es\ z$
15. Demuestre que $sin^{-1}(z) = -i\,ln\left[iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$

IV. INTEGRALES

1. Sin calcular la integral, encuentre una cota superior para la integral dada

   a) $\int_c (e^z - \bar{z})\,dz$, donde **C** es el triángulo con vértices en los puntos $\mathbf{0}, \mathbf{3}\boldsymbol{i}$ **y** $\mathbf{-4}$ con orientación positiva

   b) $\int_c \pi\, e^{\pi \bar{z}}$ donde **C** es el cuadrado con vértices en $\mathbf{0, 1, 1} + \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}$ con orientación positiva.

2. Calcule las siguientes integrales

   a) $\int_c \frac{z}{z^3+z^2-5z+3}\,dz$ donde **C:** $|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{i}| = \mathbf{2}$ orientado positivamente

   b) $\int_c log(z)\,dz\,;\, \boldsymbol{C}: |\boldsymbol{z}| = \mathbf{2}$

   c) $\int_c |z|^2\,dz\,;\, C$: segmento rectilíneo que va de $\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{z} = \mathbf{1}.$

   d) $\int_C (z^2 - 3z)\,dz\,;\, C$ es la semicircunferencia con centro en el origen de $z = 4$ a $z = -4$.

3. Evaluar $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} dt.$

4. Probar que $\int_{-c} f(z)\,dz = -\int_c f(z)\,dz$.

5. Sea el arco de $z = 2$ hasta $z = 2i$ situado en el primer cuadrante del plano complejo, probar que: $\left|\int_c \frac{z+4}{z^3-1}\,dz\right| \leq \frac{6\pi}{7}$. **Usar desigualdad del triángulo.**

6. Sin evaluar la integral, probar que $\left|\int_c \frac{dz}{z^2-1}\right| \leq \frac{\pi}{3}$ donde C es el arco de la circunferencia $|z| = 2$ hasta $z = 2i$ en el primer cuadrante. Dato: z es punto de c y debes usar las propiedades de desigualdades y módulos.

7. Empleando una primitiva, hallar el valor de la integral $\int_c z^{\frac{1}{2}}\,dz$ donde c es cualquier camino cerrado simple que va desde $z = -3$ hasta $z = 3$. Dato: El integrando es continuo a trozos sobre C, la rama $z^{\frac{1}{2}}$ no está definida sobre el rayo $\theta = 0$, donde z=3. **Escoger otra rama.**