I – TEORÍA DE LA MEDIDA

1. Demuestra que si X posee más de un elemento, entonces $P(X)$ tiene al menos dos $\sigma - \acute{a}lgebras$.
2. Sea (A_n) una colección de subconjuntos de X. Si definimos

$$limsupA_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$

   Probar que $limsupA_n$ coincide con el conjunto de puntos que están en infinitos conjuntos A_n.
3. Sea S el espacio muestral de un experimento, definamos a $E \subset P(S)$ como el conjunto de eventos posibles. El conjunto E, ¿Es una $\sigma - \acute{a}lgebra$?
4. Sea X un conjunto, $\Lambda = P(X)$ y $x \in X$. Definamos la función $\delta_x: \Lambda \to [0, \infty]$ tal que $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ y $\delta_x(A) = 0$ en otro caso. Demuestra que $\delta_x$es una medida.
5. Si (X, Λ, μ) es un espacio con medida y $E \in \Lambda$, demuestra que

$$\mu_2(A) = \mu(A \cap E)$$

   es una medida.
6. Sean (X, S) un espacio medible, $\mu_1, \mu_2: S \to [0, \infty]$ medidas y $c_1, c_2 \geq 0$. Demuestra que la función

$$\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$$

   es una medida también.
7. Sean (μ_n) una sucesión de medidas y sean $c_n > 0$, ¿$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\mu_n$ es una medida?

II – FUNCIONES MEDIBLES

1. Demuestra que la suma y el producto de funciones reales medibles también son funciones medibles.
2. Demuestra que el valor absoluto de una función medible es una función medible.
3. Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto medible E. Demuestra que
$$\{x \in E | f_n(x)\ converge\}$$
es medible.
4. Sea (X, Σ) un espacio medible y f,g : X → [0,∞] funciones Σ-medibles.
Probar que
$$\{x \in X | f(x) = g(x)\}$$
es medible.
5. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, probar que f es medible Lebesgue si y sólo si f^2 es una función medible y $\{x | f(x) > 0\}$ es un conjunto medible.

III – INTEGRACIÓN

1. Demuestre que cada función medible no negativa, definida sobre un subconjunto medible E, es límite de una sucesión creciente de funciones simples no negativas.
2. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, demuestre que $\int_E \lim_n f_n dm \leq \lim_n \int_E f_n dm$.
3. Sea $f: E \to [0, \infty]$ integrable tal que $\int_A f(x)dx = 0$ para todo $A \subseteq E$ medible. Probar que $f = 0$ en casi todo punto de E.
4. Sean f_n, f funciones no negativas integrables tales que
   - $\lim f_n = f$
   - $\lim \int f_n \, dm = \int f dm$

   Prueba que $\int |f_n - f| dm = 0$
5. Sea $S = \{z \in \mathbb{C} \mid ||z|| = 1\}$. Decimos que dos conjuntos $A, B \subset S$ son congruentes si existe un número real α tal que $B = \{ze^{i\alpha} | z \in A\}$, esto es, B es obtenido por A mediante una rotación de un ángulo α. Demuestra que existe una secuencia (E_n) de conjuntos congruentes disjuntos a pares tales que $S = \bigcup_{n\geq 1} E_n$.