I. LENGUAJES FORMALES. CONCEPTOS BÁSICOS DE LENGUAJES

<u>Símbolo o carácter:</u> Unidad mínima en un lenguaje.

<u>Alfabeto:</u> Conjunto no vacío y finito de símbolos. A estos símbolos también se les suele llamar letras del alfabeto. Se denota con **la letra griega Σ**. Ejemplos:

$$\mathbf{\Sigma_1 = \{a, b, c, \ldots, z\}, \qquad \Sigma_2 = \{0, 1\}}$$

<u>Cadena o Palabra:</u> Secuencia finita de símbolos de un alfabeto. Lo correcto es hablar de "palabras definidas sobre un alfabeto". Habitualmente utilizaremos en nuestros ejemplos las ´ultimas letras minúsculas de nuestro alfabeto (x, y, z) para denotar a las palabras. Ejemplos:

x = ***casa*** es una palabra definida sobre el alfabeto $\mathbf{\Sigma_1}$

y = ***010100*** es una palabra definida sobre el alfabeto $\mathbf{\Sigma_2}$

<u>Cadena o Palabra Vacía:</u> Es una palabra que no tiene ningún símbolo y se representa como **e**.

<u>Longitud de una palabra:</u> es el número de símbolos que componen la palabra. Se representa utilizando dos barras verticales (||). Ejemplos:

$$\boldsymbol{|x| = 4, |y| = 6, |\varepsilon| = 0}$$

<u>Lenguaje:</u> Conjunto de palabras escritas sobre un alfabeto específico, ejemplo **{aaa, abba, bbbaaa}** es un lenguaje sobre **S= {a, b}.**

Si **L** definido sobre un alfabeto **Σ**, es un conjunto cualquiera de palabras definidas sobre dicho alfabeto, por lo tanto, **L ⊂ ω(Σ).**

<u>Lenguaje Universal:</u> Definido sobre un alfabeto es el conjunto de todas las palabras que se pueden construir con las letras de dicho alfabeto. Se denota por **ω(Σ)**. El lenguaje universal de cualquier alfabeto es infinito, y siempre pertenece a ´el la palabra vacía.

Ejemplo: si **Σ = {a}** entonces **ω(Σ) = { $\boldsymbol{\varepsilon}$, a, aa, aaa, ...}**

<u>Lenguaje vacío:</u> Es el que está compuesto por ninguna cadena y se denota como ***Æ*** que es diferente al lenguaje que contiene la cadena vacía. ***Æ* = {}** y ***Æ* ¹ {e}**

Si **Σ** es un alfabeto y **w** es una cadena sobre **S**. Si **L** es un lenguaje formado por algunas de las cadenas sobre **Σ** y si **w** está en **L**, entonces se dice que **w** es un elemento de **L**. Esto es **w Î L**.

El lenguaje universal sobre **Σ** se conoce como cerradura de **Σ** y se denota por:

$\mathbf{\Sigma}^*$ donde * va a significar 0 o más.

$\boldsymbol{\Sigma^1 = \{a, b\}}$

$\boldsymbol{\Sigma^0 = \{\varepsilon\}}$

$\boldsymbol{\Sigma^0 = \Sigma^0}$ **È** $\boldsymbol{\Sigma^1}$ **È** $\boldsymbol{\Sigma^2 \ldots = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}}$

II. OPERACIONES CON CADENAS

En este apartado se presenta una colección de operaciones que se pueden realizar con palabras y las propiedades que cumplen estas operaciones

Concatenación: Sean **x** e **y** dos palabras, se concatenan para formar otra palabra que se denota **xy** y que está formada por todas las letras de **x** seguidas por las letras de **y**.

Ejemplo: x= casa y= blanca ⇒ xy = casablanca

Propiedades:

- **Operación cerrada.** Si x e y están definidas sobre el mismo alfabeto, x y también lo estará.
- **Asociativa**. (xy)z = x(yz).
- **Elemento neutro (ε).** $x\varepsilon$ = ϵx = x.
- |xy|=|x|+|y|.
- No es una operación conmutativa.

Potencia i-esima de una palabra (xi): Consiste en concatenar una palabra x consigo misma i veces. x^i = x.... $_i x$

Ejemplo: x = la ⇒ x^4 = lalalala

Propiedades:

- x^{i+j} = $x^i x^j$
- $|x^i|$ = $i\ |x|$
- x^0 = ε

Reflexión (o inversa) de una palabra ($\mathbf{x^{-1}}$): Es otra palabra definida sobre el mismo alfabeto y formada por los mismos s´ımbolos que x, dispuestos en orden inverso.

Ejemplo: x = casa ⇒ x^{-1} = asac

Propiedad: |x| = $|x^{-1}|$

Igualdad de cadenas: Si w y z son cadenas se dice que w es igual a z si tienen la misma longitud y los mismos símbolos en la misma posición y se denota mediante w = z.

Sufijo y Prefijo de Cadenas sobre un alfabeto: Si **w** y **x** son cadenas se dice que **x** es prefijo de **w** si para alguna cadena y se obtiene que **w = xy**. Si **y = ε** entonces para **w = xy** se tiene que **w = x**, con lo que toda cadena puede considerarse prefijo de sí misma. **ε** Es prefijo de cualquier cadena. (Lo mismo para sufijo.)

Prefijo Propio: Cadenas que son prefijo de una palabra, pero no iguales a la misma (lo mismo para Sufijo Propio.)

Subcadena: **w** es una subcadena de **z** si existen las cadenas **x** e **y** para las que
z = xwy.

III. OPERACIONES CON LENGUAJES

Como hemos visto anteriormente un lenguaje definido sobre un alfabeto no es más que un subconjunto del lenguaje universal de ese alfabeto. Por ejemplo, si Σ = {0,1}, podemos definir diferentes lenguajes sobre ese alfabeto:

$\boldsymbol{L_1 = \{x/|x| = 4\}}$ $\boldsymbol{L_2 = \{0^n 1^n/n > 0\}}$

$\boldsymbol{L_3} = \{$**x / x no contenga un número par de 0's**$\}$

Sobre cualquier alfabeto se pueden definir lenguajes especiales como el lenguaje vacío, que se representa como $\boldsymbol{L_\emptyset} = \emptyset$ y que no tiene ninguna palabra. También existe el lenguaje que contiene solamente la palabra vacía $\boldsymbol{L_\varepsilon} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$.

Se presentan, a continuación, diferentes operaciones que se pueden definir sobre los lenguajes. Casi todas est´an basadas en las operaciones sobre palabras que se explicaron en la sección anterior.

<u>Unión de lenguajes</u> La unión de dos lenguajes $\boldsymbol{L_1}$ y $\boldsymbol{L_2}$ definidos sobre el mismo alfabeto **Σ** es otro lenguaje, también definido sobre ese alfabeto, que contiene todas las palabras de $\boldsymbol{L_1}$ y todas las de $\boldsymbol{L_2}$.

$$\boldsymbol{L = L_1 \cup L_2 = \{x/x \in L_1 \vee x \in L_2\}}$$

Propiedades:

- **Operación cerrada.** El lenguaje resultante está definido sobre el mismo alfabeto que L_1 y L_2.
- **Asociativa.** $(L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup (L_2 \cup L_3)$
- **Conmutativa.** $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$
- **Elemento Neutro (Ø).** L ∪ Ø = Ø ∪ L = L
- **Idempotencia.** L ∪ L = L

<u>Concatenación</u> Sean dos lenguajes $\boldsymbol{L_1}$ y $\boldsymbol{L_2}$ definidos sobre el mismo alfabeto **Σ**, la concatenación de ambos lenguajes estará formada por todas las palabras obtenidas al concatenar una palabra cualquiera de $\boldsymbol{L_1}$ con otra de $\boldsymbol{L_2}$.

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{L_1 L_2} = \{\mathbf{xy/x} \in \boldsymbol{L_1} \wedge \mathbf{y} \in \boldsymbol{L_2}\}$$

Propiedades:

- **Operación cerrada.** El lenguaje resultante está definido sobre el mismo alfabeto que L_1 y L_2.
- **Asociativa.** $(L_1\ L_2)\ L_3 = L_1\ (L_2\ L_3)$
- **Elemento Neutro ($\boldsymbol{L_\varepsilon = \{\varepsilon\}}$).** L_εL = L L_ε = L
- No es conmutativa.

Potencia i-esima Es el resultado de concatenar un lenguaje consigo mismo un número i de veces. $L^i = L \ldots {}_i L$

Propiedades:

- $L^{i+j} = L^i L^j$
- $L^0 = L_\varepsilon = \{\varepsilon\}$

Clausura (o cierre de Kleene) La clausura de un lenguaje **(L^*)** es el resultado de unir todas las potencias de dicho lenguaje, es decir,

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

Clausura positiva La clausura positiva de un lenguaje (**L^+**) es la unión de todas las potencias de ese lenguaje, exceptuando la potencia cero.

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

Propiedades:

- $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$
- $L^+ = L^* L = L L^*$
- $\omega(\Sigma) = \Sigma^*$
  En este caso el alfabeto es considerado como un lenguaje, concretamente el formado por todas las cadenas de longitud 1.
- $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$

Reflexión La reflexión de un lenguaje **(L^{-1})** está formada por las inversas de todas las palabras de ese lenguaje. **$L^{-1} = \{x^{-1} / x \in L\}$**

IV. LENGUAJES REGULARES

1.- Escribir expresiones regulares para los siguientes lenguajes:

- El conjunto de cadenas del alfabeto {*a*, *b*} que contengan cualquier cantidad de *a's* seguida por una única *b.*
- El conjunto de todas las cadenas de *a*'s y *b*'s que cada *a* está entre 2 *b*'s.
- El conjunto de cadenas del alfabeto {*a*, *b*, *c*} que contengan por lo menos una *a* y por lo menos una *b.*
- El conjunto de todas las cadenas de ceros y unos que tienen al menos dos ceros consecutivos.
- El conjunto de cadenas de ceros y unos cuyo número de unos sea par.
- El conjunto de cadenas de ceros y unos que tengan cuando mucho un par de unos consecutivos.
- El conjunto de cadenas de ceros y unos que no contengan 101 como subcadena.

2.- Construir AFD que acepten cada uno de los siguientes lenguajes:

- {*w* ∈ {a, b} * | cada a en *w* está inmediatamente seguida por una b}.
- {*w* ∈ {a, b} * | *w* tiene abab como subcadena}.
- {*w* ∈ {a, b} * | *w* no tiene ni aa ni bb como subcadena}.
- {*w* ∈ {a, b} * | *w* tiene un número impar de a's y un número par de b's}.
- {*w* ∈ {a, b} * | *w* tiene tanto ab como ba como subcadenas.

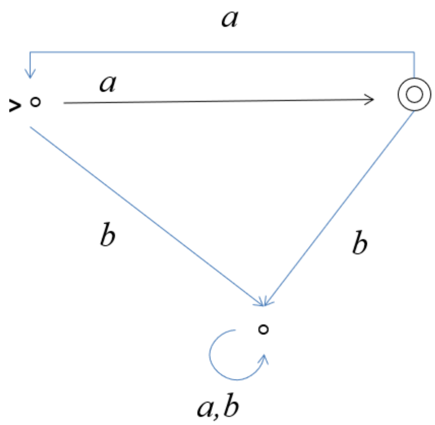
3.- Obtener un AFN que acepte los siguientes lenguajes:

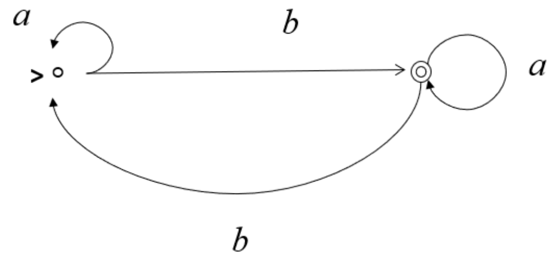
- ab* U ab*a.
- {w | w termina en 01}.
- El conjunto de cadenas basadas en el alfabeto {0,1, 2, …,9} cuyo último dígito haya aparecido antes en la misma entrada.
- El conjunto de cadenas basadas en el alfabeto {0,1, 2, …,9} tales que el último dígito NO haya aparecido antes en la misma entrada.

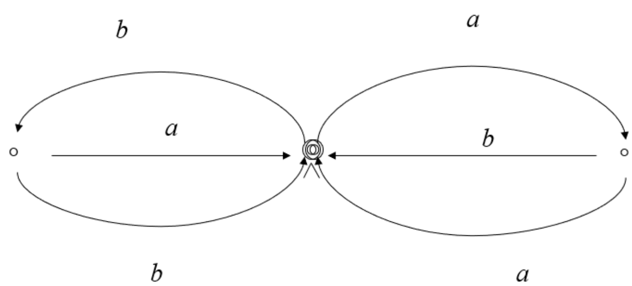
4.- Dibujar los diagramas de AFN que acepten los siguientes lenguajes y convertirlos a AFD:

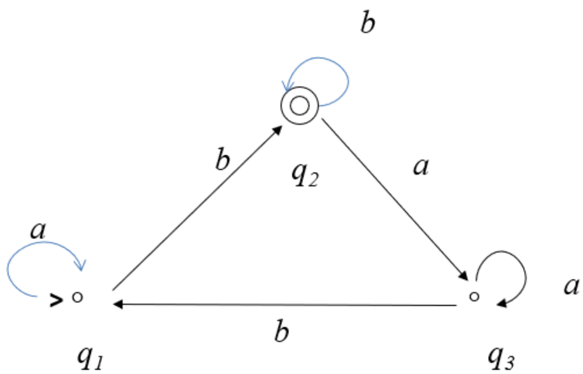
- (ab)*(ba)* U aa*
- ((ab U aab)*a*)*
- ((a U b)* (ab U ba$^+$b))*

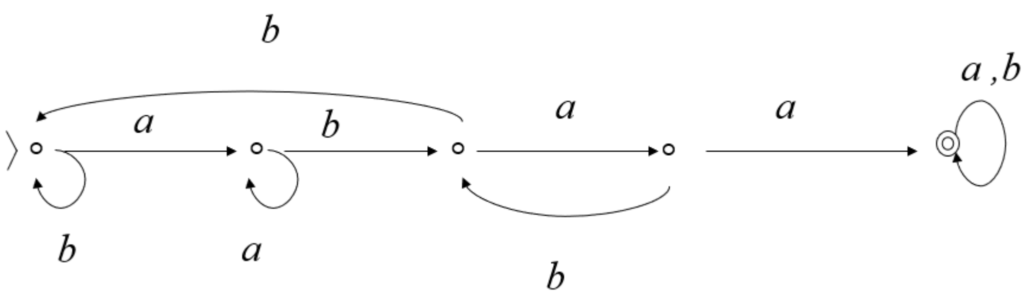
5.- Escribir la expresión regular de los siguientes autómatas:







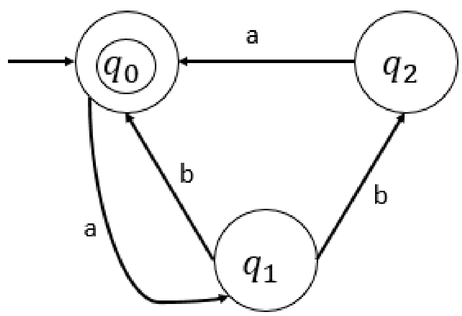




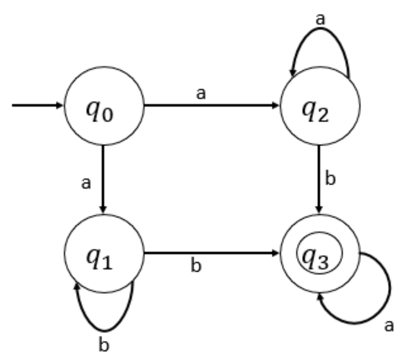
V. LENGUAJES INDEPENDIENTES DEL CONTEXTO

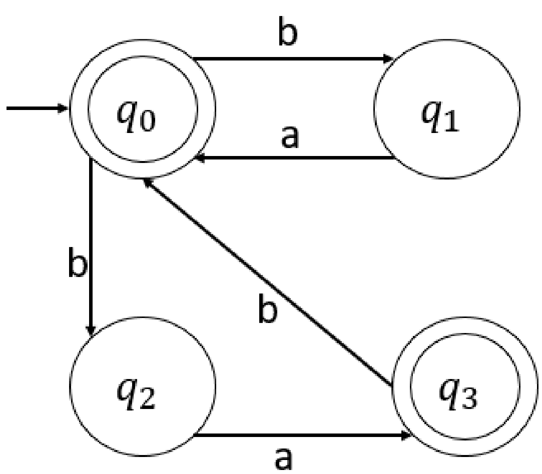
1. Obtenga la gramática regular de los siguientes AFN

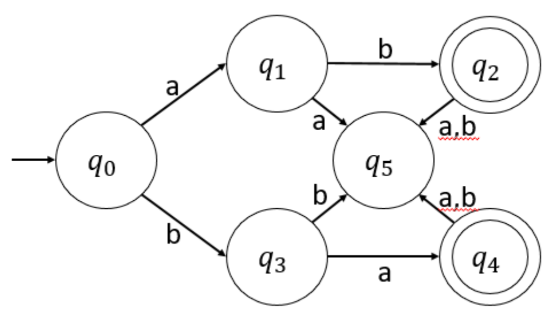
a)



b)







2. Obtenga los AFN de las siguientes gramáticas regulares

a) S → aA | bB A → aC | bC B → aC C → aD D → aE E → aD| bD | ε	b) S → aS | bS | bA A → bS | aB | bB B → aA | bA | bB	c) S → aA A → aB B → aA | aC C → ε	d) S → aAc A → aAc | bBc C → bBc | ε

3. Genera un GIC para los siguientes problemas:

a) $L = \left\{a^i b^{i3} \middle| \, i \geq 1\right\}$

b) $L = \left\{ab^i d \middle| \, i \geq 0\right\}$
c) $L = \{x^a z^a \mid a \geq 0\}$
d) $L = \{a^n c^m \mid n \geq 0 \; y \; m \geq 0\}$
e) $L = \{w^n x^m y^n z^m \mid n \geq 0 \; y \; m \geq 1\}$

4. Simplifica las siguientes gramáticas lo máximo posible

a) S → Aa | Ba | B A → Aa | ε B → aA | BB | ε	c) S → ACBa|D A → bbC | ε B → Sc | ddd C → eA | f | C D → E | SABC E → gh | ε	d) S → A | B A → C | D B → D | E C → S | a | ε D → S | b E → S | c | ε

5. Elimina la recursividad por la izquierda de las siguientes gramáticas

a) S → Sa | Ab | Bc | d A → Se | f B → Sg | h	b) S→ Aa | b A→ Ac Sd | ε	c) S → Sba | bA A → Bc | d B→ Sab | Ab | c

6. Encuentra el ADPND de los siguientes problemas

a) $L = \{d^{x+y}c^{x} \mid x \geq 1 \; y \; y \geq 1\}$

b) $L = \{w^{3a}x^{b} \mid b \geq 1 \; y \; a \geq 0\}$

c) $L = \{a^{n}b^{2n} \mid n \geq 1\}$

d) $L = \{d^{2x}ca^{y} \mid x \geq 0 \; y \; y \geq 1\}$

e) $L = \left\{h^{i}j^{2i}k^{3n} \,\middle|\, 0 \leq n < i \; y \; i \geq 1\right\}$

VI. MÁQUINAS DE TURING

1. Obtenga de forma gráfica la máquina de Turing de los siguientes lenguajes

a) $L = \{a^n b^{2n} c^{2n} \mid n \geq 0\}$
b) $L = \{(ab)^n c^n (ba)^n \mid n \geq 1\}$
c) $L = \{a^n b^n c^{n+1} \mid n \geq 0\}$
d) $L = \{a^n b^{n+1} a^{2n} \mid n \geq 0\}$
e) $L = \{a^n b^n a^n b^m \mid n \geq 0 \; y \; m \geq 0\}$

2. Para los lenguajes del punto 1 obtenga las transiciones (δ) de la máquina de Turing de cada uno de los incisos.