I. DISTRIBUCIONES MULTIVARIADAS

1. Si X e Y son variables aleatorias con función de probabilidad conjunta de la forma

$$f(x,y) = c(y^2 - x^2) \cdot e^{-y} \qquad -y \leq x \leq y \quad ; \quad 0 < y < \infty$$

a) Encuentre el valor de la constante c.

b) Encuentre las funciones de probabilidad marginal de X e Y.

c) ¿Son X e Y independientes? ¿Por qué?

2. Si X e Y son variables aleatorias con función de probabilidad conjunta de la forma

$$f(x,y) = c\left(\frac{2^{x+y}}{x!y!}\right) \; ; x = 0,1,2,\ldots ; y = 0,1,2,\ldots$$

a) Encuentre el valor de la constante c.

b) Encuentre las funciones de probabilidad marginal de X e Y.

c) ¿Son X e Y independientes? ¿Por qué?

3. La función de densidad conjunta de Y_1 y Y_2está dada por

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_1, & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1 \\ 0\,, & e.c.o.l \end{cases}$$

a) Encuentre las funciones de densidad marginal de Y_1 y Y_2

b) Obtenga la densidad condicional de Y_1 dado que $Y_2 = y_2$.

c) Obtenga la densidad condicional de Y_2 dado que $Y_1 = y_1$.

d) Encuentre $P(Y_1 \leq \frac{3}{4} \mid Y_2 = \frac{1}{2})$

4. La función de densidad conjunta de Y_1 y Y_2 está dada por:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6y_1^2 y_2, & 0 \leq y_1 \leq y_2, y_1 + y_2 \leq 2 \\ 0, & e.c.o.l \end{cases}$$

a) Verifique que ésta es una función de densidad conjunta válida.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que $Y_1 + Y_2$ sea menor que 1?

5. La función de densidad conjunta de Y_1 y Y_2 está dada por

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} k(1 - y_2), & 0 \leq y1 \leq y2 \leq 1 \\ 0, & e.c.o.l \end{cases}$$

a) Encuentre el valor de k que haga de ésta una función de densidad de probabilidad.

b) Encuentre las densidades marginales de Y_1 y Y_2.

c) Obtenga la densidad condicional de $Y1$ dado que $Y2 = y2$.

d) Obtenga la densidad condicional de $Y2$ dado que $Y1 = y1$

e) Encuentre $P\ (Y2 \geq 3|Y1 = 2)$

6. Suponga que Y_1 y Y_2 tienen función de densidad conjunta

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 30{y_2}^2 y_1\,, & y_1 - 1 \leq y_2 \leq 1 - y_1, 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & e.c.o.l \end{cases}$$

a) Verifique que ésta es una función de densidad conjunta válida.

b) Encuentre $P(Y_1 > Y_2)$

c) Demuestre que la densidad marginal de Y1 es una densidad beta con

d) α = 2 y β = 4.

e) Obtenga la densidad marginal de Y2.

f) Obtenga la densidad condicional de Y_2 dado que Y_1 =$y1$.

7. Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias independientes que se distribuyen exponencial con media = 1.Encuentre $P(Y_1 > Y_2 |\ Y_1 < 3\ Y_2)$

8. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta.

a) Encuentre $P[X1 \ \leq\ 2]$
b) Encuentre $P[X1 \ \leq\ X2]$
c) ¿X_1 y X_2 son independientes? ¿Por qué?

		X_2	
X_1	1	2	3
1	1/12	1/6	0
2	0	1/9	1/5
3	1/18	1/4	2/15

II. SUCESIONES Y CONVERGENCIA DE VARIABLE ALEATORIA

1. Sean, $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria. Sean $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ las estadísticas de orden. Demuestre que:

1) $f_{X_{(1)}}(x) = n \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-1}$
2) $f_{X_{(n)}}(x) = n \cdot f(x) \cdot [F(x)]^{n-1}$
3) $f_{X_{(i)}}(x) = \binom{n}{i} \cdot i \cdot f(x) \cdot [F(x)]^{i-1} \cdot [1 - F(x)]^{n-i}$

III. CONVERGENCIA CASI SEGURA

1. Considere el espacio muestral $S = [\,0, 1\,]$ con una medida de probabilidad uniforme en este espacio, i.e.,
$P([a, b]) = b - a,$ para todo $0 \le a \le b \le 1$
Definimos la secuencia $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ como:

$$X_n(S) = \begin{cases} 1, & 0 \le S < \dfrac{n+1}{2n} \\ 0, & e.c.o.l \end{cases}$$

También definimos la $v.a.\, X$ en este espacio muestral como:
Demuestre que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$

IV. LEMA DE BOREL-CANTELLI

1. Sea $E_1, E_2, \dots$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad, demuestre que si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) < \infty \rightarrow \; P(\limsup_{n \to \infty} E_n) = 0$$

V. CONVERGENCIA DE DISTRIBUCION

1. Si $X_1, X_2 \dots$ son $i.i.d.$ Uniforme (0,1) y $X_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$, determine si X_n converge en distribución.

VI. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

Obtenga la función característica de la una $v.a.\, X \sim Poisson\ (\lambda)$.

Obtenga la función característica de una $v.a.\, X \sim Exp\ (\lambda)$.

VII. TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

1. Demuestre el teorema del límite central.

2. La media del salario de un profesor de New Jersey es $52,174. Suponga que ladistribución es normal con desviación estándar $7,500.
   a) Probabilidad de que un profesor seleccionado aleatoriamente gane menos que $50,000.
   b) Si tenemos una muestra de 100 profesores, probabilidad de que la media muestral sea menos de $50,000.

3. Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{40}$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con densidad de probabilidad

$$f(x) = cx^2 \text{ , } si \ 0 < x < 2$$

   a) Utilice el teorema de límite central para aproximar la probabilidad

$$P(x_1 + x_2 + \cdots + x_{40} \leq 37)$$

VIII. MOMENTOS Y ESPERANZA CONDICIONAL

1. Suponga que $X\ e\ Y$ son variables aleatorias continuas con función de probabilidad conjunta Encuentre $E(X^2Y)$

$$f(x,y)=\begin{cases}4(x-xy), 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \qquad e.c.o.l.\end{cases}$$

a) Encuentre $VAR(X-Y)$

b) Determine ρ

c) Determine $E(y|x)$

2. Si la función de densidad conjunta de X e Y está dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2e^{-2x}}{x}, 0\le x\le\infty, 0\le y\le x\\ 0, \qquad e.c.o.l.\end{cases}$$

a) Encuentre $COV(x,y)$

3. Si X e Y son $v.a.i.i.$ con media µ y varianza σ^2 encuentre $E[(x-y)^2]$

4. Un dado se lanza dos veces. Sea X igual a la suma de los resultados e Y sea igual al primer resultado menos el segundo. Calcular $COV(x,y)$

5. Un prisionero está atrapado dentro de una celda con tres puertas.
Puerta 1, regresa a la celda en dos días, en la puerta 2 regresa a la celda en 4 días y en la puerta 3 sale en un día, si seleccionas al azar la puerta ¿en cuánto tiempo promedio logrará salir?

6. Suponga que el número de personas que entran en un día a una tienda es una $v.a.$ con media=50. La cantidad de dinero que gastan los clientes es una $v.a.$ con media de 8 pesos. Son variables independientes. ¿Cuál es la cantidad esperada de dinero en la tienda en un día?

7. Sea $X1$y $X2$ variables aleatorias discretas con funciones de probabilidad conjunta. Determine $E(x1|x2 = 2)$ y $VAR(x1|x2 = 2)$.

		X_2	
X_1	1	2	3
1	1/12	1/6	0
2	0	1/9	1/5
3	1/18	1/4	2/15

Demuestre que $Cov(x, E(y|x)) = Cov(x, y)$

8. Si la densidad de probabilidad trivariada de X_1, X_2, X_3 está dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 + x_2)e^{x_3}, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, x_3 > 0 \\ 0, \qquad e.c.o.l. \end{cases}$$

Encuentra el valor esperado de $X_2{}^2 X_3$ dado $X_1 = 1/2$

9. Si dos variables aleatorias tienen la densidad conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, x > 0, y > 0 \\ 0, \qquad e.c.o.l. \end{cases}$$

Determine $E(xy), E(x), E(y)\ y\ Cov(x, y)$

10. Suponga que las variables aleatorias Y_1 y Y_2 tienen medias $\mu 1$ y $\mu 2$ y varianzas Ơ1^2 y Ơ2^2 respectivamente. Use la definición básica de la covarianza de dos variables aleatorias para establecer que:

$$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(Y2, Y1)$$
$$Cov(Y_1, Y_1) = Var(Y_1) = \sigma$$