I.- FUNDAMENTOS DE LÓGICA.

1.- Sea la proposición p falsa, la proposición q verdadera y la proposición r falsa. Determine si cada proposición de los siguientes ejercicios es falsa o verdadera.

a) $p \vee q$
b) $\neg p \vee q$
c) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$
d) $\neg p \vee \neg(q \wedge r)$

2.- Escriba las tablas de verdad de cada proposición dada.

a) $p \wedge \neg q$
b) $(p \vee q) \wedge \neg p$
c) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

3.- Suponiendo que p y r son falsas y que q y s son verdaderas, encuentre el valor de verdad para cada proposición.

a) $\neg p \to \neg q$
b) $(p \to q) \wedge (q \to r)$
c) $\big(s \to (p \wedge \neg r)\big) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$
d) $\big((p \wedge \neg q) \to (q \wedge r)\big) \to (s \vee \neg q)$

4.- Para cada par de proposiciones P y Q, establezca si $P \equiv Q$ o no.

a) $P = p \wedge q, Q = \neg p \vee \neg q$
b) $P = p \wedge (q \vee r), Q = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
c) $P = p \to q, Q = \neg q \to \neg p$
d) $P = p \to q, Q = p \leftrightarrow q$

II.- CONJUNTOS Y FUNCIONES.

1.- En los siguientes ejercicios, establezca el universo como el conjunto $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Sea $A = \{1,4,7,10\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ y $C = \{2,4,6,8\}$. Liste los elementos de cada conjunto.

i. $A \cup B$
ii. $B \cap C$
iii. $C - A$
iv. $\bar{A}$
v. $A \cap (B \cup C)$
vi. $B \cap \emptyset$

2.- En los siguientes ejercicios, dibuje un diagrama de Venn y sombree el conjunto indicado.

i. $A \cap \bar{B}$
ii. $B \cap \overline{(C \cup A)}$
iii. $\bar{A} - B$
iv. $(A \cup B) - B$

3.- Demuestre si la función es uno a uno, sobre o biyectiva tomando en cuenta que el dominio de cada función es el conjunto de los reales.

i. $f(x) = 6x - 9$
ii. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
iii. $f(x) = sen(x)$
iv. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

III.- CONTEO Y PROBABILIDAD.

1.- En un club de personas hay 6 hombres y 7 mujeres. Dada esta información, conteste las siguientes preguntas:

a) ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 5 personas?
b) ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 hombres y 4 mujeres?
c) ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 4 personas que al menos tenga una mujer?
d) ¿De cuantas maneras se puede elegir un comité de 4 personas de manera que Martha y Rodolfo no estén juntos?

2.- Se realiza una pequeña encuesta en la que se pide a 10 personas que elijan su refresco favorito entre Coca Cola, Pepsi y Dr. Peper. Con estos datos responda lo siguiente:

a) Si una persona elige un refresco al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas elija Pepsi?
b) Si una persona elige un refresco al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una persona no haya elegido una Dr. Peper?
c) Si una persona elige un refresco al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todos elijan Coca Cola?

3.- Los ejercicios siguientes hacen referencia a una bolsa que contiene 20 pelotas: 6 rojas, 6 verdes y 8 moradas.

a) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 5 pelotas si todas se consideran diferentes?
b) ¿De cuántas maneras se pueden sacar 2 pelotas rojas, 3 verdes y 2 moradas, si todas las pelotas se consideran diferentes?
c) Se sacan 5 pelotas y se reemplazan. Después se sacan otras 5 pelotas. ¿de cuántas maneras puede hacerse esto si las pelotas se consideran diferentes?
d) Se sacan 5 pelotas y al menos una es roja, después se reemplaza. Luego se sacan 5 pelotas y cuando mucho una es verde. ¿de cuántas maneras puede hacerse esto si las pelotas se consideran diferentes?

4.- Encuentre el número de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ sujeto a las condiciones indicadas.

a) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
b) $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$
c) $x_1 = 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
d) $x_1 \geq 0, x_2 > 0, x_3 = 1$
e) $0 \leq x_1 \leq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

5.- En los siguientes ejercicios, encuentre el coeficiente del término cuando la expresión se expande.

a) $x^4y^7;\ (x+y)^{11}$
b) $x^2y^3z^5;\ (x+y+z)^{10}$
c) $a^2x^3;\ (a+ax+x)(a+x)^4$

6.- Encuentre el número de términos de la expansión de cada expresión:

a) $(x+y+z)^{10}$
b) $(w+x+y+z)^{12}$

7.- Enuncie las tres formas del principio del palomar.

8.- Dieciocho personas tienen nombre de pila Alfredo, Benjamín y César y apellidos Domínguez y Enríquez. Demuestre que al menos tres personas tienen el mismo nombre y apellido.

IV.- RELACIONES RECURSIVAS.

1.- En los siguientes ejercicios, encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales que generen una sucesión que comience con los términos dados:

a) 3, 7, 11, 15, …
b) 1, 1, 2, 4, 16, 128, 4096, …

2.- Suponga que una persona invierte $2000 al 14% de interés anual compuesto. Sea A_n la cantidad al final de n años, responda lo siguiente:

a) Encuentre una relación de recurrencia para la sucesión $A_0,\ A_1, \dots$.
b) Encuentre una condición inicial para la sucesión $A_0,\ A_1, \dots$.
c) Encuentre A_1, A_2 y A_3.
d) Encuentre una formula explicita para A_n.
e) ¿Cuánto tiempo tomará que una persona duplique su inversión inicial?

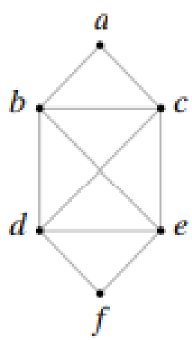
3.- Resuelva la relación de recurrencia indicada para las condiciones iniciales que se señalan:

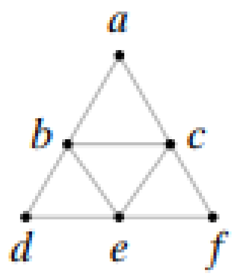
a) $a_n = -3a_{n-1}; a_0 = 2$
b) $a_n = 2na_{n-1}; a_0 = 1$
c) $a_n = a_{n-1} + n; a_0 = 0$
d) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}; a_0 = a_1 = 1$
e) $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}; a_0 = 4, a_1 = 10$
f) $2a_n = 7a_{n-1} - 3a_{n-2}; a_0 = a_1 = 1$

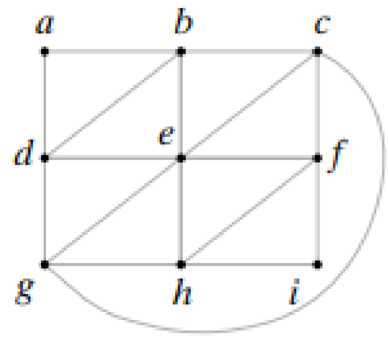
V.- GRÁFICAS Y ÁRBOLES.

1.- Defina gráfica simple, dirigida, no dirigida, ponderada y bipartita.

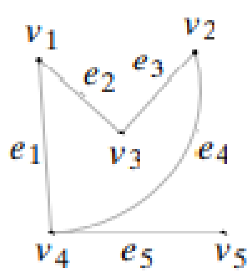
2.- Pruebe que cada gráfica tiene una trayectoria del vértice a al vértice a que pasa por cada arista justo una vez, encontrando la trayectoria por inspección.

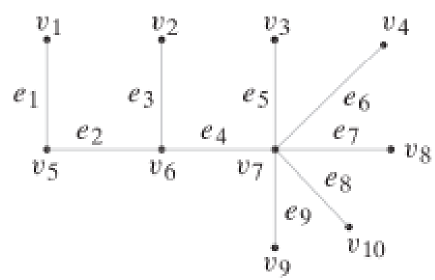


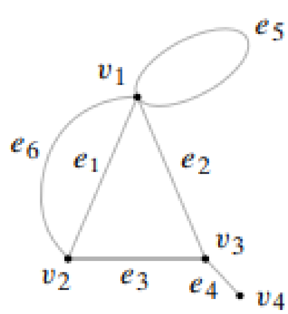




3.- Determine qué gráficas son bipartitas. Si la gráfica es bipartita, especifique los conjuntos ajenos de vértices.

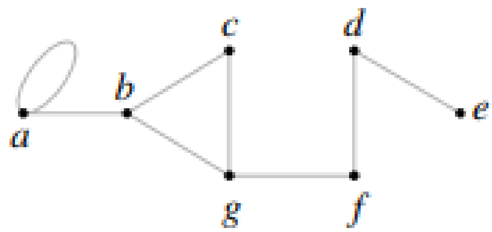




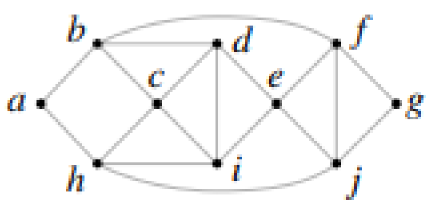


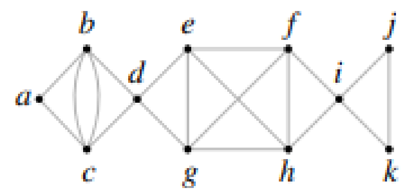
4.- Defina que es una gráfica conexa, una trayectoria, un ciclo y un ciclo de Euler.

5.- Encuentre todas las subgráficas conexas de la siguiente gráfica, que contengan todos los vértices de la gráfica original y tengan tan pocas aristas como sea posible. ¿Cuáles son trayectorias simples? ¿Cuáles son ciclos? ¿Cuáles son ciclos simples?

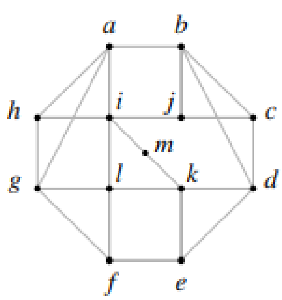


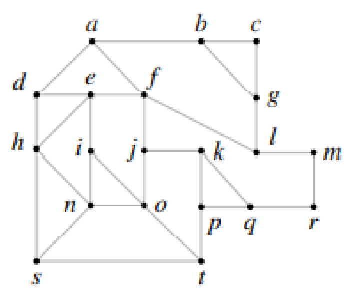
6.- En los siguientes dos ejercicios, decida si las gráficas tienen un ciclo de Euler. Si lo tienen, muestre uno.

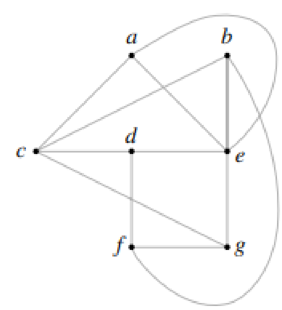




7.- Determine si cada gráfica contiene un ciclo de Hamilton. Si así es, exhiba uno; de otra manera, dé un argumento para demostrar que no hay un ciclo de Hamilton.







8.- Defina que es una matriz de adyacencia y de incidencia. Además, establezca qué significa que dos gráficas sean isomorfas.

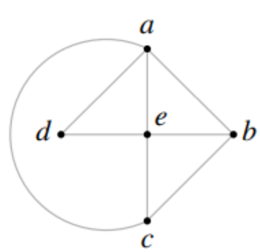
9.- En los siguientes dos ejercicios dibuje la gráfica representada por cada matriz de adyacencia.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

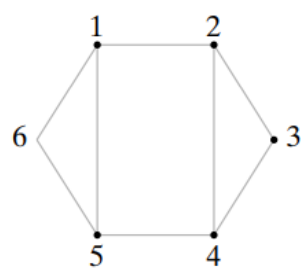
10.- En los siguientes dos ejercicios dibuje la gráfica representada por cada matriz de incidencia.

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

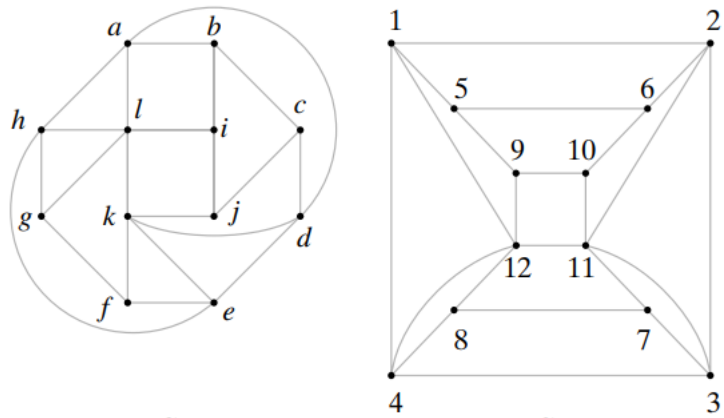
11.- En los siguientes dos ejercicios, demuestre si las gráficas G_1 y G_2 son isomorfas o no.



G_1

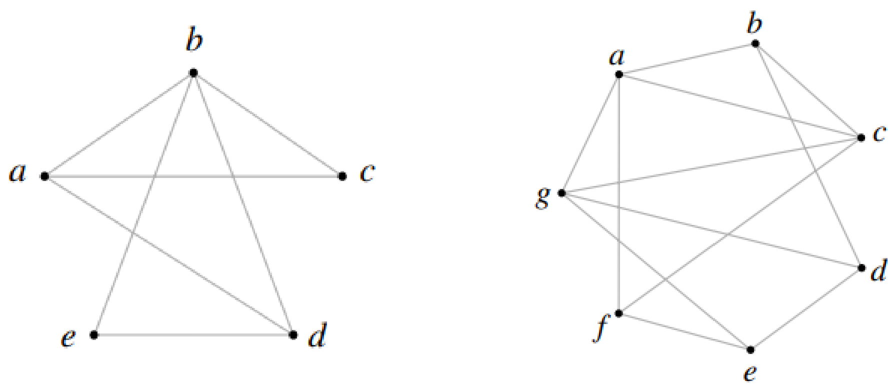


G_2

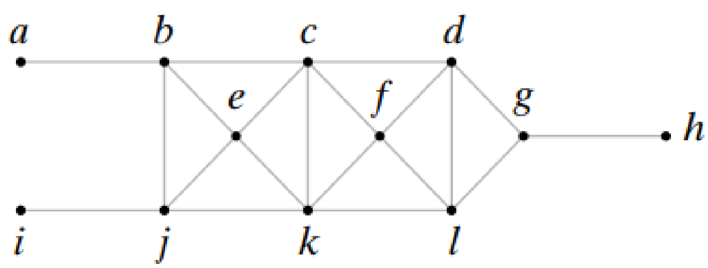


G_1 $\quad$ G_2

12.- Defina que es una gráfica plana y demuestre que las siguientes dos gráficas son planas dibujándola de nuevo sin que se crucen las aristas.

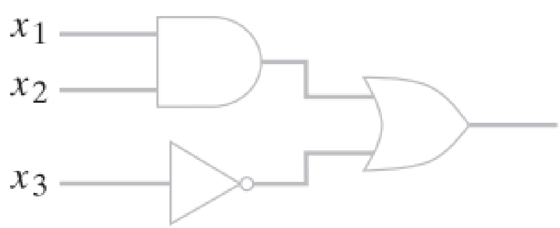


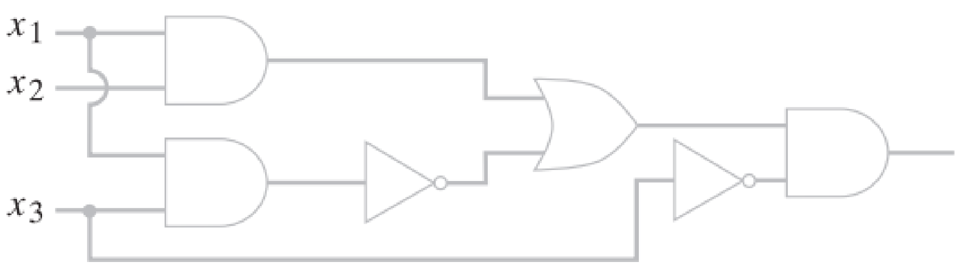
13.- Defina que es un árbol de expansión y encuentre uno la siguiente gráfica.



VI.- ÁLGEBRA BOOLEANA Y CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

1.- Escriba la expresión booleana que representa el circuito combinatorio, la tabla lógica y la salida de cada compuerta simbólicamente.





2.- Pruebe o desapruebe las ecuaciones en los siguientes ejercicios:

a) $\overline{\overline{x}} = x$
b) $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} = x_1 \vee x_2$
c) $\left(\overline{(\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3})}\right) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3})$

3.- Escriba el dual de cada afirmación en los siguientes ejercicios:

a) $(x + y)(x + 1) = x + xy + y$
b) $(x' + y')' = xy$
c) $xy' = 0$ si y sólo si $xy = x$
d) $x + x(y + 1) = x$