I – DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a. ¿Qué es una ecuación diferencial?
   b. Defina las clasificaciones de una ED y de un ejemplo de cada uno.
   c. De un ejemplo de una EDO y EDP
   d. De un ejemplo de una EDO de segundo orden
   e. De un ejemplo de una EDP de primer orden
   f. Describa la forma normal de la ecuación 6xy'+x=y
   g. Solución de una EDO, solución implícita, explícita y familias de soluciones.
   h. Sistemas de ecuaciones diferenciales.
   i. Problemas con valores iniciales, existencia y unicidad de una solución para dicho problema, y problema con valor en la frontera.
2. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales de acuerdo a su tipo, orden y grado.
   a) $\frac{dy}{dt} + 2sen(t)y = k$
   b) $y'' - 2y = 0$
   c) $\left(\frac{d^3r}{dx^3}\right)^5 + 2\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)^2 - r = 0$
   d) $z^3 \frac{d^3z}{dy^3} - 2y^4 \frac{d^5z}{dy^5} = \tan(z)$
3. Compruebe que la función indicada es una solución particular de la ecuación.
   a) $y' + y = x + 1; \quad y = x + 3e^{-x}$
   b) $x'' + x = 0; \quad x = tsen(t)$
   c) $(5w - 2s)w' - 2w = 0; 5w^2 - 4sw = cte$
4. Determine si la ecuación diferencial pertenece a la familia de curvas dada o descrita
   a) $y = Ccos(x)$
   b) $xy - y = Ce^x$
   c) $z = Ae^x sen(r) + Br$

II – ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Campos direccionales.
   b) Ecuaciones diferenciales autónomas.
   c) Ecuación diferencial de primer orden separable.
2. Resuelva la ecuación diferencial dada por el método de separación de variables.
   a) $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$
   b) $sen(3x)dx + 2ycos^3(3x)dy = 0$
   c) $(me^{2q} + 8me^q + 7m)^{\frac{3}{2}}dm + e^q dq = 0$
   d) $\frac{du}{dy} = \frac{1}{y\sqrt{4y-9}}$
3. Encuentre una solución explícita del problema con condiciones iniciales dados.
   a) $(e^x + 1)sen(x)dx = (1 + \cos(x)\,dy\ ; y(0) = 0$
   b) $\frac{dy}{dx} + xy = y\ ;\ y(1) = 3$
   c) $ydy = 4x(y^2 + 1)^{1/2}\,dx\ ; y(0) = 1$
   d) $\frac{dz}{dr} = \frac{rz^4 - 4z^4}{r^3z^2 - 3r^3}\ ; z = 1\ cuando\ r = 1$
   e) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\ ;\ y = 2\ donde\ x = 1$

III – ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Funciones homogéneas
   b) Dependencia e independencia lineal
   c) Método de solución de ecuaciones diferenciales homogéneas.
2. Determine si las siguientes ecuaciones son homogéneas.
   a) $M(x,y) = x^2 - xy^2$
   b) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$
   c) $(x + y)dx + xydy = 0$
3. Cada una de las ED es homogénea, resuelva los problemas usando la sustitución adecuada
   a. $(x - y)dx + xdy = 0$
   b. $(w^2 + r^2)dw = (wr - w^2)dr$
   c. $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$
   d. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $y'' + y = 0$ que satisfagan las siguientes condiciones:
   e. $y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
   f. $y(0) = 0, y(\pi) = 0$
   g. $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
   h. $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

IV – ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Diferencial de una función de dos variables.
   b) Condición que cumple una diferencial exacta.
   c) Algoritmo o método de solución de una diferencial exacta.
   d) Forma general de las integrantes.
2. Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. En caso de serlo, resuelva.
   a) $(2x+y)dx+(x+6y)dy=0$
   b) $(2x-1)dx+(3y+7x)dy=0$
   c) $(x-y^3+y^2\sin x)dx=(3xy^2+2y\cos x)dy$
   d) $(x+y\cos x)dx+\sin x\ dy=0$
   e) $e^x(y^3+xy^2+1)dx+3y^2(xe^x-6)dy=0$
   f) $(\mathrm{y}\ln\mathrm{y}-e^{-xy})dx+(\frac{1}{y}+xlny)dy=0$
   g) $\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)dx=(1+\ln x)dy$
   h) $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$
   i) $\left(e^x+\ln y+\frac{y}{x}\right)dx+\left(\frac{x}{y}+\ln x++\sin y\right)dy=0$
   j) $\left(9-\frac{7}{y}+x\right)\frac{dy}{dx}-y+3=\frac{2}{x}-5$
   k) $x+5\frac{dy}{dx}=5xe^x+y+9x^2$
3. Resuelva el problema con valores iniciales.
   a) $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0;\ y(1)=1$
   b) $(e^x+y)dx+(2+x+ye^y)dy=0;\ y(0)=1$
   c) $y\ \frac{dy}{dx}=2x+3y^2-1;\ y(1)=1$
4. Resuelva la ecuación diferencial dada, determinando un factor integrante adecuado.
   a) $(3x+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$
   b) $3xydx+(4y+9x^2)dy=0$
   c) $\frac{dy}{dx}+y=e^{3x}$
   d) $x\frac{dy}{dx}-y=x^2\sin x$

V – ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Ecuación diferencial lineal de primer orden (EDL1O).
   b) Defina la forma estándar y de un ejemplo
   c) Algoritmo o método de solución de una EDL de primer orden.
   d) EDL homogénea y no homogénea.
   e) Transitorio, función de entrada o de conducción, la salida o respuesta.
2. Determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición "I" de la solución y si hay términos transitorios en la solución.
   a) $y' + 3x^2y = x^2$
   b) $x^2y' + xy = 1$
   c) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2sen(x)$
   d) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$
   d) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$
3. Resuelva el problema con valores iniciales e indique el intervalo de máxima definición "I" de la solución.
   a) $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln(x)\,, y(1) = 10$
   b) $xy' + y = e^x;\ y(1) = 5$
   c) $y' + 4xy = x^2e^{x^2};\ y(0) = -4$
   d) $L\frac{di}{dt} + Ri = E;\ i(0) = i_0$ (L, R, E, i_0 son constantes)
   e) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x\,;\ y(0) = -1$

VI – APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. La población de una comunidad aumenta a una tasa que es proporcional al número de personas presente en el tiempo t. Si una población p_0 se ha duplicado en 5 años ¿Cuánto tardará en triplicarse?
2. A partir de ese mismo concepto de rapidez neta, determine un modelo para la población $P(t)$ si la tasa de natalidad es proporcional a la población presente al tiempo t, pero la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población presente al tiempo t.
3. La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de 180℃ y la temperatura del aire que lo rodea es de 25℃. Después de 15 min la temperatura del motor ha bajado a 140℃, ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la temperatura del motor disminuya hasta 30℃?
4. Para un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor, determine una ecuación diferencial que exprese la carga $q(t)$, si la resistencia es R, la capacitancia es C y el voltaje aplicado es $E(t)$.
5. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura es de 70°F, y se lleva a un lugar donde la temperatura del aire es de 10°F. Después de medio minuto, el termómetro marca 50°F. ¿Cuál es la temperatura que marca en t=1 minuto?, ¿Cuánto tiempo le llevará al termómetro alcanzar los 15°F?
6. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 150℃. Tres minutos después su temperatura es de 90℃. ¿Cuánto tiempo le tomará al pastel enfriarse hasta la temperatura ambiente de 20℃?
7. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de 5°F. Después de un minuto el termómetro marca 55°F , y luego de 5 min marca 30°F . ¿Cuál es la temperatura inicial del interior de la habitación?
8. La cantidad de bacterias en un cultivo crece en un instante cualquiera con una rapidez proporcional al número de ellas hay en dicho instante. Después de 8 horas se observa que se tiene 400 bacterias y que al cabo de 10 horas hay 2000. Determine el número inicial de bacterias.

9. Si después de 18 años la población de cierta ciudad se ha duplicado y después de 25 años la población es de 200000 habitantes. Halle a) el número inicial de habitantes. b) ¿Cuántos habitantes tendrá al cabo de 100 años?
10. Determina las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dada:
    a. $x^2 - y^2 = c$
    b. Extra para el ejercicio a): Halle el elemento de las trayectorias ortogonales que pasa por el punto $P\ (2,1)$
    c. $4y + x^2 + 1 + Ae^{2y} = 0$

VII – ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN SUPERIOR

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Problema con valores iniciales de $n - ésimo$ orden para una EDL y problema con valores en la frontera.
   b) Teorema de existencia y unicidad
   c) Operadores diferenciales, principio de superposición de ED homogéneas.
   d) Dependencia e independencia lineal de un conjunto de funciones, Wronskiano, conjunto fundamental de soluciones y solución general EH.
   e) Principio de superposición para ED no homogéneas, función complementaria y solución particular.
2. La familia de funciones que se proporciona es la solución general en el intervalo que se indica (compruebe). Encuentre un miembro de la familia que sea solución del PVI.
   a) $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$, $(-\infty,\ \infty)$; $y'' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
   b) $y = c_1e^{4x} + c_2x\ln x$, $(0,\ \infty)$; $x^2y'' - xy' + y = 0,\ y(1) = 3,\ y'(1) = -1$
   c) Dado que $y = c_1x + \ c_2x^2$ es una familia de dos parámetros de soluciones de $xy'' - y' = 0\ en\ el\ intervalo\ (-\infty,\ \infty)$, demuestre que no se pueden encontrar las constantes c1 y c2 tales que un miembro de la familia satisface las condiciones iniciales $y\ (0) = \ 0,\ y'(0) = 1$. Explique por qué esto no viola el teorema 4.1.1.- 8 -
   d) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}, (-\infty, \infty);\ y'' - 3y' - 4y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$
   e) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}, (-\infty, \infty);\ y'' - 3y' - 4y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2y = c_1 + c_2x^2$ es una familia de dos parámetros de soluciones de $xy'' - y' = 0$ en el intervalo $(-\infty,\ \infty)$, halle dos miembros de la familia que satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
3. Determine si el conjunto de funciones es "li"sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.
   a) $f_1(x) = 5, f_2(x) = cos^2(x),\ f_3(x) = sen^2(x)$
   b) $f_1(x) = x, f_2(x) = x - 1,\ \ f_3(x) = x + 3$
   c) $f_1(x) = 1 + x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$

d) $f_1(x) = \cos 2x,\ f_2(x) = 1,\ f_3(x) = \cos^2 x$

e) $f_1(x) = e^x\ ,\ f_2(x) = e^{-x},\ f_3(x) = \sinh x$

f) $f_1(x) = 2 + x,\ f_2(x) = 2 + |x|$

4. Compruebe que las soluciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ED en el intervalo dado. Forme la solución general.

a) $y'' - y' - 12y = 0;\ e^{3x},\ e^{4x}, (-\infty, \infty)$

b) $4y'' - 4y' + y = 0;\ e^{x/4},\ xe^{x/4},\ (-\infty, \infty)$

c) $x^2y'' + 6xy' + 12y = 0; x^3,\ x^x, (0, \infty)$

d) $y^{(2)} + y'' = 0;\ 1,\ x,\ \cos x\ ,\ \sin x\ ,\ (-\infty, \infty)$

e) $y'' - 4y = 0;\ \cosh 2x,\ \sinh 2x,\ (-\infty, \infty)$

f) $y^{(2)} + y'' = 0;\ 1,\ x,\ \cos x\ ,\ \sin x\ ,\ (-\infty, \infty)$

VIII – REDUCCIÓN DE ORDEN

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los primeros principios de la reducción de orden y dé un ejemplo. Hacer lo mismo para explicar y ejemplificar cómo deducir la fórmula para encontrar una segunda solución de la ecuación diferencial.
2. La función indicada $y_1(x)$, es una solución de la ecuación diferencial dada. Use reducción de orden detalladamente para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.
    a) $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y_1(x) = e^{2x}$
    b) $y'' + 16y = 0;\ y_1(x) = \cos 4x$
    c) $y'' - y = 0;\ y_1(x) = \cosh x$
    d) $9y'' - 12y' + 4y = 0;\ y_1(x) = e^{2x/3}$
    e) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0;\ y_1(x) = x^2$
3. La función indicada $y_1(x)$, es una solución de la ecuación homogénea asociada. Use el método de reducción de orden para determinar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación no homogénea dada.
    a) $y'' - 4y = 0;\ y_1(x) = e^{-2x}$
    b) $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x};\ y_1(x) = e^{x}$
    c) $y'' - 4y' + 3y = x;\ y_1(x) = e^{x}$

IX – ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Ecuación auxiliar
   b) Forma de la solución general para raíces reales y distintas, reales y repetidas, y para raíces complejas conjugadas.
   c) Método de los coeficientes indeterminados, operador diferencial y método de variación de parámetros.
2. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dada.
   a) $12y'' - 5y' - 2y = 0$
   b) $y'' + 9y' = 0$
   c) $y'' - 4y' + 5y = 0$
   d) $3y'' + 2y' + 1y = 0$
3. Encuentre la solución general de la ED de orden superior dada.
   a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
   b) $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$
   c) $16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$
4. Resuelva el problema con valores iniciales.
   a) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = 0,\ y(1) = 0, y'(1) = 2$
   b) $y'' + y' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$
   c) $y''' + 12y'' + 36y' = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -7$
5. En los problemas 41 y 42 resuelva el problema dado usando primero la forma de la solución general dada en (10). Resuelva de nuevo esta vez usando la fórmula dada en (11).
   a. $y'' - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5$

X – ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS

1. Resuelva la ED dada usando coeficientes indeterminados (método de superposición).
   a) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$
   b) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$
   c) $y'' - y' = -3$
   d) $y'' + 4y = 3\sin 2x$
   e) $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x+2)e^{4x}$
2. Escriba la ED en la forma $L(y) = g(x)$, donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes. Si es posible, factorice L.
   a) $9y'' - 4y = \sin x$
   b) $y'' - 4y' - 12y = x - 6$
   c) $y''' + 2y'' - 13y' + 10y = xe^{-x}$
   d) $y'''' + 8y' = 4$
3. Compruebe que el operador diferencial anula las funciones indicadas.
   a) $D^2 + 64;\ y = 2\cos 8x - 5\sin 8x$
   b) $2D - 1;\ y = 4e^{x/2}$
   c) $(D-2)(D+5);\ y = e^{2x} + 3e^{-5x}$
   d) $D^4;\ y = 10x^3 - 2x$
4. Resuelva el problema con valores iniciales (CI-método del anulador).
   a) $y'' - 5y' = x - 2;\ y(0) = 1, y'(0) = 2$
   b) $y'' - 4y' + 8y = x^3;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$
5. Resuelva cada ED por medio de variación de parámetros.
   a) $y'' + y = \sec x$
   b) $y'' + y = \sec x \tan x$
   c) $y'' - y = \sinh 2x$
   d) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

XI – TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a. Transformada de Laplace
   b. Propiedades de la transformada de Laplace. (Solo propiedades)
   c. Condiciones suficientes para la existencia de L $\{f(t)\}$
   d. Transformación lineal
   e. Orden exponencial, transformada inversa, transformada de una derivada, teoremas de traslación y función de Heaviside.
2. Encontrar L $\{f(t)\}$ por definición.

   a) $f(t)=\begin{cases}4, & 0<t<2\\ 0, & t\geq 2\end{cases}$ b) $f(t)=e^{t}\cos(t)$

   c) $f(t)=e^{-2t-5}$ d) $f(t)=t^3$
3. Calcule las siguientes transformadas de Laplace utilizando las propiedades de la transformada y transformadas básicas
   1. $\mathcal{L}\{t^4-\frac{1}{2}t^3\}$
   2. $\mathcal{L}\{e^{-3t}sen(6t)\}$
   3. $\mathcal{L}\{t^2e^3sen(t)\}$
4. Encontrar la transformada inversa de Laplace dada.

   a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$ c) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-8s+17}\}$

   b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$ d) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3+s)}\}$
5. Use transformadas de Laplace para resolver el problema con valores iniciales dado. Use tablas de transformadas si es necesario.

   a) $\frac{dy}{dt}-y=1,\ y(0)=0$
   b) $y''+5y'+4y=0,\ \ y(0)=1, y'(0)=0$
   c) $y'+y=2\cos(5\text{t}), y(0)=0$
   d) $y'-y=te^t\sin t\,; y(0)=0$

XII – APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Use el álgebra apropiada para encontrar la transformada inversa de Laplace dada.

   a) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{s^3+s-2}\}$

   b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{6s}{(s^2+4)(s^2+1)}\}$

   c) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$

2. Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

   a) $x' + 4x = 13sen(2t), \quad x(0) = 6$

   b) $y'' - y = 10e^{3x}, \quad y(0) = 5, y'(0) = 0$

   c) $\frac{d^2}{dw^2} - 4\frac{dz}{dw} + 4z = w^3e^{2w}, z(0) = 0, z'(0) = 0$

   d) $y^{(4)} - y = 8e^t, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones integro-diferenciales y compruebe el resultado.

   a) $\frac{dy}{dt} + \int_0^t y(t)dt = 1 \ ; y(0) = 2$

   b) $u' + 6u + 9\int_0^r u(r)dr = 1 \ ; u(0) = 0$

XIII – SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Forma normal de un sistema de EL de primer orden y forma matricial de un sistema lineal.
   b) Vector solución, eigenvalores y matriz exponencial.
   c) Sistema de ecuaciones.
   d) Describa los métodos para resolver un sistema de ecuaciones y de un ejemplo de cada uno.

2. Escriba el sistema lineal en forma matricial.

   a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y + 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - 3y \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 10y + 6z \end{cases}$

3. Compruebe que el vector X es una solución del sistema dado.

   a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 7y \end{cases}; \qquad X = \binom{1}{2}\ e^{-5t}$

   b) $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X;\ X = \binom{-1}{2}\ e^{-3t/2}$

4. Determine la solución general del sistema dado.

   a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - \dfrac{dy}{dt} + y = 0 \ ; \\ \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4y = 1 \\ x + \dfrac{dy}{dt} = 2 \end{cases}$

5. Utilizando el método de variación de parámetros, resolver la siguiente ED

$$y'' - y = \frac{1}{t}$$

6. Calcule $e^{At}\ y\ e^{-At}$ si:

   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$