I – ÁLGEBRA DE VECTORES $(\mathbb{R}^3)$

1. Usando un sistema de mano derecha (dextrógiro), ubicar los puntos $A(1,2,1)$, $B(-2,3,-1)$ y $C(4,-2,1)$. Además, encontrar las distancias AB, AC y BC.
2. Sea $V_3 = \{\langle x,y,z\rangle | x,y,z \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de todos los vectores posición tridimensionales; calcular la magnitud de $a \in V_3$ si:
   a) $a = \langle -1, 3, 3\sqrt{2}\rangle$
   b) $a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$
3. Dados los vectores $a, b \in V_3$, calcular $2a + 3b$, $a - 3b$, $\|a - b\|$ y los vectores unitarios correspondientes a "a" y a "b" para cada inciso.
   a) $a = \langle 4, 2, -6\rangle$ y $b = \langle -5, 3, -2\rangle$
   b) $a = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $b = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$
   c) $a = \langle -1, 0, 2\rangle$ y $b = \langle 3, -1, 2\rangle$
   d) $a = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $b = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$
4. Utilizando los vectores, demostrar que con los puntos $A(4,9,1)$, $B(-2,6,9)$ y $C(6,3,-2)$ son vectores que conforman un triángulo rectángulo.
5. Dados dos vectores $a, b \in V_3$, hallar dos vectores unitarios ortogonales a ambos.
   a) $a = \langle 1, 0, -4\rangle$ y $b = \langle 1, -4, 2\rangle$
   b) $a = \langle 1, 0, 2\rangle$ y $b = \langle 3, 2, -1\rangle$
   c) $a = \langle 5, 3, -2\rangle$ y $b = \langle 8, 0, -1\rangle$
   d) $a = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $b = -\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
   e) $a = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ y $b = \hat{\imath} + 3\hat{k}$
   f) $a = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ y $b = 4\hat{\jmath} + \hat{k}$
6. Usar el producto cruz para determinar el ángulo entre los vectores $a, b \in V_3$.
   a) $a = \langle 1, 2, 3\rangle$ y $b = \langle -2, 1, 0\rangle$
   b) $a = \langle 4, 2, 6\rangle$ y $b = \langle 9, 11, 13\rangle$
   c) $a = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $b = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$
   d) $a = 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 7\hat{k}$ y $b = -4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 9\hat{k}$

II – RECTAS Y PLANOS

1. Hallar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta que cumple las características que se indican.
   a) Pasa por el punto $A(2,-1,6)$ y es paralela al vector $\langle 7,1,-4\rangle$.
   b) Pasa por los puntos $B(0,6,4)$ y $C(1,0,6)$.
   c) Pasa por el punto $D(3,0,3)$ y es paralela a la recta $x=-t,\ y=1,\ z=8-3t$.
   d) Pasa por el punto $E(2,\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ y es perpendicular a los vectores $\langle \frac{1}{2},0,1\rangle$ y $\langle 0,1,\frac{1}{2}\rangle$.
2. En cada uno de los incisos determinar si las rectas son perpendiculares. De no ser así, encontrar el ángulo entre ellas.
   a) $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2-4t \\ z=-6+2t \end{cases}$, $\begin{cases} x=1+2s \\ y=4+6s \\ z=-1-3s \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x=4+0t \\ y=2t \\ z=1+7t \end{cases}$, $\begin{cases} x=2+s \\ y=0s \\ z=5+0s \end{cases}$
3. Hallar la ecuación del plano dado.
   a) Plano que contiene al punto $A(0,5,1)$ con vector normal $\langle -2,-1,2\rangle$.
   b) Plano que contiene los puntos $B(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{4})$, $C(\frac{5}{2},0,0)$ y $D(\frac{1}{7},-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.
   c) Plano que contiene a $E(0,-\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ y es paralelo al plano $x+y-2z=1$.
4. Hallar la intersección entre los planos dados (si existe).
   a) $3x-y+2z=1$ y $x-2y+z=0$
   b) $2x-6y+4z=3$ y $5x+y+z=-4$
5. En cada uno de los incisos hallar la distancia entre los objetos dados.
   a) El punto $A(10,4,-1)$ y el plano $8x-y-2z=6$.
   b) Los planos: $4x-7y+2z=-1$ y $4x-7y+2z=26$.

III – CILINDROS Y SUPERFICIES

1. Dibujando las trazas apropiadas, bosquejar e identificar la superficie dada.
   a) $z = x^2$
   b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$
   c) $z = e^x$
   d) $y^2 = 8x$
   e) $z = \operatorname{sen}(y)$
   f) $z = 9 - x^2 - y^2$
   g) $x^2 + y^2 = 4$
   h) $x + y = 3$
   i) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   j) $4x^2 + 25y^2 + z^2 = 100$
2. Encontrar las ecuaciones de las siguientes superficies de revolución:
   a) La superficie generada al girar la parábola $\frac{1}{4}y = x^2$ en el plano XY alrededor del eje Y.
   b) La superficie generada al girar la gráfica de $y^2 + (x-3)^2 = 1$ en el plano XY alrededor del eje Y.
   c) La superficie generada al girar la gráfica de $z = y^2 - 2y$ en el plano YZ alrededor del eje Z.
3. Dibujar las trazas dadas en un único sistema coordenado tridimensional.
   a) $z = x^2 + y^2;\ x = 0,\ x = 1,\ x = 2$
   b) $z = x^2 + y^2;\ y = 0,\ y = 1,\ y = 2$
   c) $z = x^2 - y^2;\ x = 0,\ x = 1,\ x = 2$
   d) $z = x^2 - y^2;\ y = 0,\ y = 1,\ y = 2$

IV – CURVAS PARAMÉTRICAS PLANAS Y LONGITUD DE ARCO EN $\mathbb{R}^3$

1. Representar los valores de la función dada con valores vectoriales.

   a) $r(t) = \langle 2t, t^3 + 4,\ t - 7\rangle,\ t = -2,\ t = 0,\ t = 4$

   b) $r(t) = \langle 9t,\ t^2,\ 1\rangle,\ t = -4,\ t = 1,\ t = 3$

   c) $r(t) = (40 - t^2)i + (10 + t)j + (2t^3 - 5)k,\ t = -4,\ t = 0,\ t = 4$

   d) $r(t) = \langle \operatorname{sen}(t),\ \cos(t) + 3,\ 600t\rangle,\ t = -\frac{\pi}{2},\ t = 0,\ t = \frac{\pi}{6}$

   e) $r(t) = \langle \operatorname{sen}(2t), 5, \cos\left(t^2 + \frac{\pi}{2}\right)\rangle,\ t = -\frac{\pi}{2},\ t = 0,\ t = \frac{\pi}{2}$

   f) $r(t) = \langle \cos(t) - \operatorname{sen}(4t),\ 2\operatorname{sen}(3t) + \cos(5t),\ t\rangle,\ t = 0,\ t = \pi,\ t = \frac{3\pi}{2}$

   g) $r(t) = \langle t\cos(3t),\ 5t^3,\ t\operatorname{sen}(t)\rangle,\ t = -\pi,\ t = -\frac{\pi}{3},\ t = 0$

   h) $r(t) = \langle \operatorname{sen}(t),\ \operatorname{sen}(2t),\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)\rangle,\ t = \frac{\pi}{3},\ t = \frac{\pi}{2},\ t = \pi$

   i) $r(t) = \langle t^2 - 7,\ 2t - 4,\ t^2\rangle,\ t = -5,\ t = -2,\ t = 10$

2. Dibujar la curva trazada por la función con valores vectoriales dada.

   a) $r(t) = \langle 2\cos(2t),\ 2\operatorname{sen}(2t),\ 0\rangle$

   b) $r(t) = \langle \frac{t}{2},\ 1,\ t - 3\rangle$

   c) $r(t) = \langle t, \frac{t^2}{4},\ t\rangle$

   d) $r(t) = \langle 0, -3,\ t^3\rangle$

3. Calcular la longitud de arco de la curva correspondiente.

   a) $r(t) = \langle \operatorname{sen}(t),\ 2\operatorname{sen}(-t), 3\operatorname{sen}(-t)\rangle;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

   b) $r(t) = \langle \frac{2\sqrt{6}}{3} t^{3/2},\ \frac{3}{2}t^2 - 1,\ t\rangle;\ 2 \le t \le 5$

V – COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

1. Escribir en coordenadas cilíndricas la ecuación dada.

   a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $y = 4$

   c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $x^2 + (y-3)^2 = 9$

   e) $z = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ f) $z = e^{-x^2-y^2}$

2. Dibujar las gráficas de las ecuaciones cilíndricas.

   a) $z = r$ b) $r^2 + z^2 = 1$

   c) $\theta = \frac{\pi}{6}$ d) $r = 5$

   e) $z = \sqrt{9 - r^2}$ f) $r = 6\operatorname{sen}(\theta)$

   g) $r = 5\cos(\theta)$ h) $z = e^{r^2}$

3. Convertir el punto esférico (ρ, ϕ, θ) en coordenadas rectangulares.

   a) $(2, 0, \pi)$ b) $(4, \frac{\pi}{2}, \pi)$ c) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

4. Expresar la ecuación en coordenadas esféricas.

   a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ b) $z^2 = x^2 + y^2$

   c) $z = \frac{y}{x}$ d) $y = x$

   e) $z = 0$ f) $z = 1$

5. Dibujar la gráfica de la ecuación esférica (ρ, ϕ, θ) .

   a) $\rho = 1$ b) $\phi = \frac{\pi}{4}$

   c) $\theta = \frac{\pi}{3}$ d) $\phi = \frac{\pi}{2}$

   e) $\rho = 4$ f) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

VI – FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. Describir y dibujar el dominio de la función.
   a) $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$
   b) $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   c) $h(x,y) = \ln(x + 2y)$
2. Calcular los valores de la función en los puntos indicados.
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2;\ f(1,6),\ f(-1,3)$
   b) $g(x,y) = x^3 + 2x^2y - 1;\ g(-2,1),\ g(3,0)$
   c) $h(x,y) = \frac{x^2}{x^3-2y};\ h(1,4),\ h(-4,0)$
   d) $w(x,y) = \sqrt{x + y^2 + 4};\ w(5,4),\ w(20,-5)$
3. Trazar las gráficas de $z = f(x,y)$.
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2;\ z = 1,\ z = 4,\ z = 9$
   b) $f(x,y) = x^2 - y^2;\ z = 1,\ z = 4,\ y = 1$
4. Dibujar una representación de contorno para las siguientes funciones.
   a) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$
   b) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$
   c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   d) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

VII – LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcular el límite indicado.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,5)} \frac{xy^2}{3x^2-4}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,4)} \frac{\cos(xy)}{y^2+1}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,0)} \frac{e^{xy}}{x^2+y^2}$

2. Mostrar que el límite indicado no existe.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-4y^2}{x^2+2y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

3. Demostrar que el límite indicado existe.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\operatorname{sen}(y)}{2x^2+y^2}$

4. Determinar todos los puntos en los cuales la función dada es continua.

a) $f(x,y) = 6xy + \cos(4x^2y)$

b) $g(x,y) = e^{3x-4y} + x^2 + y$

c) $h(x,y) = \ln(5 - x^2 + y)$

d) $w(x,y) = \tan(x+y)$

e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-49}$

5. Usar coordenadas polares para hallar el límite indicado, si es que existe. Observación: $(x,y) \to (0,0)$ equivale a $r \to 0$.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8x^2y^2}{x^2+y^2}$

VIII – DERIVADAS PARCIALES, DIFERENCIABILIDAD Y DIFERENCIAL TOTAL

1. Hallar las derivadas parciales de primer orden de las funciones dadas por definición. Calcular el valor de la derivada parcial en el punto indicado.

   a) $f(x,y) = xy - 3y^2;$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,3),$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-2)$

   b) $g(x,y) = 2x^4y^2 + 7y;$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x}(3,1),$ $\quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,20)$

2. Hallar las derivadas parciales de orden superior que se indican.

   a) $f(x,y) = x + 3xy^2 + y^3;$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

   b) $g(x,y) = 2x^3 - xe^y + 6\cos(2y);$ $\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$

   c) $h(x,y,z) = \ln(xy^2z^3);$ $\quad h_{xx}, \quad h_{yyz}, \quad h_{xxyzz}$

3. Hallar todos los puntos en donde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e interpretar gráficamente el significado de los puntos.

   a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2 - y^4$

   b) $f(x,y) = e^{\cos(x)+\operatorname{sen}(y)}$

4. Determinar si las siguientes funciones son diferenciables.

   a) $g(x,y) = xy + y$

   b) $h(x,y) = xy^2 + 2$

5. Hallar el diferencial total de las funciones dadas.

   a) $f(x,y) = \cos(xy) + e^{xy}$

   b) $g(x,y) = (x - x^4y)^{13}$

   c) $h(x,y) = \sqrt[3]{x+y}$

IX – REGLA DE LA CADENA, DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTES

1. Usar la regla de la cadena para hallar la derivada de $g(t)$.

   a) $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big);\ f(x,y) = 3x^2y - \operatorname{sen}(y),\ x(t) = \sqrt{t^2+4}, y(t) = 2e^t$

   b) $g(t) = f\big(x(t,z), y(t,z)\big);\ f(x,y) = x^2 + y^2,\ x(t,z) = te^z, y(t,z) = te^{-z}$

2. Establecer la regla de la cadena para la función compuesta general.

   a) $g(t) = f(x(t),\ y(t),\ z(t))$

   b) $g(u,v) = f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

3. Usar diferenciación implícita para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

   a) $3xz - z^3 + yz = 0$ b) $x^3 + y^3 + z^3 = -6xyz + 1$

4. Hallar el gradiente de la función dada en el punto indicado.

   a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(2xy) + y^2;\ A(\pi, 1)$

   b) $f(x,y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9};\ B(4,3)$

   c) $f(x,y,z) = z^2e^{2x-y} - 4xz^2;\ C(1,2,2)$

5. Calcular las derivadas direccionales de la función en el punto dado, en la dirección del vector indicado.

   a) $g(x,y) = x^2y + 4y^2;\ A(2,1),\ u = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$

   b) $h(x,y) = e^{xy} + 2x^4y^2\ ;\ B(0,1),\ u$ en la dirección de $\langle 1, -\sqrt{2} \rangle$

   c) $f(x,y) = \cos(2x - y);\ C(\pi, 0),\ u$ en la dirección desde $D(\pi, 0)$ hasta $E(2\pi, \pi)$.

6. Hallar las direcciones de cambio máximo y mínimo de la función en el punto dado, y los valores de máxima y mínima razón de cambio.

   a) $f(x,y) = x\cos(3y);\ A(-2, \pi)$

   b) $g(x,y) = y^2e^{4x};\ B(0, -2)$

X – PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES A LAS SUPERFICIES

1. Encontrar una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

   a) $z = x^2 + y^2$; $A(1, 0, 1)$

   b) $z = e^{x^2 - y}$; $B(1, 1, 1)$

   c) $z = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$; $C(\frac{\pi}{2}, \pi, 0)$

   d) $z = \sqrt{x - y}$; $D(-1, -5, 2)$

   e) $z = 1 - x^2 - y^2$; $E(1, 1, -1)$

   f) $z = x^3 + y^3 + \frac{x}{y-1}$; $F(1, 2, 10)$

   g) $z = \frac{x}{y}$; $G(0, -3, 0)$

   h) $z = x^2(x - 4y)$; $H(1, -1, 5)$

2. Para cada uno de los incisos, encontrar una recta normal al plano que pase por el origen, es decir, por el punto $O(0, 0, 0)$.

   a) $z = x^3 + xy^4 - 8$; $A(3, 2, 67)$

   b) $z = e^{x-2y}$; $B(0, -2, e^4)$

   c) $z = \cos(xy + \pi)$; $C(\frac{\pi}{2}, 1, 0)$

   d) $z = x^2 + y^2 + 64$; $D(2, 2, 72)$

   e) $z = 5 - x + y^3$; $E(-4, 4, 73)$

   f) $z = \ln(x^6y^4)$; $F(\sqrt[3]{e}, \sqrt{e}, 4)$

   g) $z = x + xy^3$; $G(-1, -2, 7)$

   h) $z = \frac{x^2}{y}$; $H(8, 4, 16)$

XI – EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. Hallar todos los puntos críticos e intentar clasificarlos si es posible.
   a) $f(x,y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$
   b) $g(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$
   c) $h(x,y) = xy^2 - x^2 - 2y$
   d) $w(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   e) $v(x,y) = x\,\text{sen}(y)$
   f) $u(x,y) = 6xy^2 - 2x^3y + y^2$
2. Hallar todos los puntos críticos y analizar gráficamente cada punto (utilizar un software si se requiere), clasificando cada punto.
   a) $f(x,y) = x^2 - \frac{4xy}{y^2+1}$
   b) $g(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
   c) $h(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$

XII – REGLA DE L´HOPITAL E INTEGRALES IMPROPIAS

1. Calcular los límites indicados utilizando la regla de L'Hopital.

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x}\right)$

   b) $\lim\limits_{x\to 16}\left(\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{4}x}{x-16}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^3}{e^{2x}}\right)$

   d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}\right)$

   e) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{e^{x-8}-1}{x(x-8)}\right)$

   f) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left((x-1)\ln(x-1)\right)$

   g) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\ln(x)}\right)$

   h) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\csc(x)\right)$

2. Determinar si las siguientes integrales son impropias.

   a) $\int_0^6 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ b) $\int_1^{60} \frac{5}{x^5-x}\,dx$ c) $\int_4^{\infty} \sqrt{x}\,dx$

   d) $\int_1^{\infty} \sqrt{\frac{7}{2x-1}}\,dx$ e) $\int_1^{1600} \frac{1}{x}\,dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \tan(x)\,dx$

3. Determinar si las siguientes integrales convergen o divergen. En caso de que la integral converja, calcular el valor de la integral.

   a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\,dx$ b) $\int_0^{\infty} \sqrt[3]{x-1}\,dx$

   c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}\,dx$ d) $\int_{-8}^{-5} \frac{5}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$

   e) $\int_0^{\infty} \cos(x)\,e^{\operatorname{sen}(x)}\,dx$ f) $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$