I – ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

1. Sea $G = \mathbb{Q}^{+}, a * b = \frac{ab}{2}$

   OBS. $0 \notin \mathbb{Q}^{+}$

   ¿ $\mathbb{Q}^{+}$es un grupo?

2. Determine si $(G,*)$ es un grupo.

   Sea $G = \mathbb{Z}^{+}, 0 \neq \mathbb{Z},\ a * b = a + b$ suma usual

3. Sea $T = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 |\ a_3 = 1\}$

   ¿T es un subgrupo de $P_3(\mathbb{R})$?

   OBS. $T = \{1 + 10x + x^3, 5 - x^2 + x^3, x^3 \ldots\}$

4. Sea $T = \{A \in M_{nxn}(\mathbb{R})|\ AB = BA, B\ matriz\ fija\ en\ M_{nxn}(\mathbb{R})\}$

   ¿Será T un subgrupo de $M_{nxn}(\mathbb{R})$ bajo la suma usual?

5. Sea $(G,*)$ un grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G.

   Se define el conjunto $H * K = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$

   Probar que $H * K$ es un subgrupo del grupo $(G,*)$.

II – ESPACIOS VECTORIALES

1. Determine y demuestre si el conjunto V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y el producto por escalar usuales correspondientes, en caso de no serlo indique qué axioma no cumple.

   i) $V = \mathbb{R}^3$

   ii) $V = P_{\leq 4}$

   iii) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

2. Determine si H es un subespacio de $V = \mathbb{R}^2$

   i) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$

   ii) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$

3. Describa el espacio solución $C_s \subset \mathbb{R}^3$ del sistema

   $x + 2y - z = 0$ $\quad$ $4x + 2y + z = 0$ $\quad$ $3x + z = 0$

4. Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ y $H = \left\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \vec{0}\right\}$. ¿H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$?

5. Determinar si V es una combinación de los vectores dados

   i) $V = \mathbb{R}^3, v_0 = (2, 4, 0), v_1 = (3, 2, 4), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (0, 3, 0)$

   ii) $V = \mathbb{R}^2$

   Sea $W = \{k(3, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}$

   Si $v \in \mathbb{R}^2, v = (2,4)$, ¿$v = (2, 4) \in W$?

6. Determine si H genera a $\mathbb{R}^2$

   i) $H = \{(3, 2), (-1, 0)\}$

   ii) $H = \{(4, 2)\}$

7. Si $H = \{(a, b)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ¿ $(x, y) = k(a, b)$?

8. Considere $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ un subespacio en $\mathbb{R}^3$

   Encuentre vectores que generen a W.

9. Determine si H es un conjunto Linealmente independiente o dependiente en el espacio vectorial V.

   i) $H = \{(2, 3), (1, 0), (-1, 4)\}$, $V = \mathbb{R}^2$

   ii) $V = M_{2x2}(\mathbb{R})$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

III – BASES Y DIMENSION

1. Determine si el conjunto de vectores dado forma una base, y describa al que espacio generan.

   a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

   b) En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) En P_3: $2x,\ x^3 - 3, 1 + x - 4x^3, x^3 + 18x - 9$.

2. Demuestre que cualesquiera 4 polinomios en $P_2\ (\mathbb{R})$ son linealmente dependientes.

3. Establezca una base del espacio solución del siguiente sistema homogéneo:

$$x - 3y - z = 0$$

$$2x - y + 4z = 0$$

4. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\},\ B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y suponga que:

$$a_1 = 4b_1 - b_2, a_2 = -b_1 + b_2,\ \ a_3 = b_2 - 2b_3$$

   a) Encontrar la matriz de cambio de base de $B\ a\ A$, y de a $A\ a\ B$.

   b) Encuentre las coordenadas de x referidas a la base B, donde:

$$x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$$

   OBS. $[x]_A = (3, 4, 1))$

5. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

   Encuentre una base para el subespacio W generado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

6. Sea D_3 el espacio vectorial de matrices diagonales de $3x3$

   OBS. Una matriz diagonal tiene ceros en todas partes, menos en la diagonal

   i) Encuentre una base para D_3.

   ii) ¿Cuál es la dimensión de D_3?

   iii) ¿El conjunto de matrices diagonales $3x3$ es un subespacio de las matrices $3x3$ con la suma de matrices y multiplicación por un escalar.

IV – ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO.

1. Determine si la función $\langle X, Y\rangle: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle X, Y\rangle = 3x_1y_1 + 10x_2y_2$$

   donde $X = (x_1, x_2),\ Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

2. Considere el espacio $\mathbb{R}^3$, con el producto interno canónico. Calcular la norma del vector $v = (3, 1, 4)$

3. Calcular la norma de los siguientes vectores de acuerdo con el producto interno definido:
   a) $(2, 4, -5)$ en $\mathbb{R}^3$ con producto interno $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$
   b) $\cos(x)$ en el espacio de las funciones continuas en el intervalo [-1,1] con producto interno $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$
   c) $(2, 4, -5)$ en $\mathbb{R}^3$ con producto interno $(x, y) = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1$
   d) $(i, 0, 2 - i)$ en $\mathbb{C}^3$ con producto interno $(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$

4. Considere en $M_{2x2}(\mathbb{R}),\ si\ A, B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

   $\langle A, B\rangle: M_{2x2}(\mathbb{R})\ x\ M_{2x2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

   $\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ es el producto interno canónico en $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

   Ahora, considerando este producto, halle $||A||$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Verifique si los siguientes conjuntos de vectores son ortonormales:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

6. Encuentre una base ortonormal para el espacio vectorial dado.

a) $\mathbb{R}^3$, tomando la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$

OBS. Primero obtener una base para el plano.

c) $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = z\,, y = -w\}$

7. Sea $W = \{ax^2 - 2bx - 2a + b \ / a, b \ \in \ \mathbb{R}\}$ un subespacio de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2.

Definamos el producto interno entre dos polinomios como:

$$< p, q > = \sum_{i=-1}^{1} p(i)q(i)$$

a) Obtener el complemento ortogonal de W

b) Obtener una base ortonormal de W

c) Obtener la proyección sobre W de los polinomios:

$i. P(x) = \ x^2 - 2x + 2$ $\qquad\qquad$ $ii. S(x) = 1$

8. Calcula el complemento ortogonal de los siguientes subespacios (con el producto interno usual).

a) El plano xy en $\mathbb{R}^3$

b) $\{(x, y, z, w) | z = 2x\}$

c) $\{(0,0)\}$

d) La recta $y = -x$

e) $\{(x, y, z) | 5x - y + 2z = 0\}$

V – TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Determine si las siguientes transformaciones son lineales.

   a) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, T(x) = 2x + 5$

   b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x, y) = 5xy$

   c) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ T(x) = x^5$

   d) $T: M_{2x2} \to M_{2x2},\ T(A) = A - A^T$

   e) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$

   f) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x - 2y, x + y, \mathrm{x}^2)$

   g) $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 = b$

2. Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$T(1,0,0) = (3,4), T(0,1,0) = (-2,0)\ y\ T(0,0,1) = (0,-1)$$

   Calcule $\mathrm{T}(3,-1,7)$.

3. Demuestre que, si V es un espacio vectorial real, y la transformación $T: V \to V$ cumple que $T(x + y) = T(x) + T(y)$ y si $\propto \geq 0$ entonces $T(\propto x) = \propto T(x)$.

4. Encuentre la representación matricial de la transformación lineal dada y encuentre su núcleo, imagen, nulidad y rango. Indicar si la transformación lineal es un isomorfismo; en caso de serlo hallar su inversa.

   a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 5x + 3y \end{pmatrix}$

   b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 5z \\ 3y + 2z \\ x - 6y + z \end{pmatrix}$

   c) $T: P_2 \to P_1;\ T(a + bx + cx^2) = 2\mathrm{c}x + \mathrm{b}$

5. Sean $T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ; T_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3y - 2z \\ x - 4y + z \end{pmatrix} y\ T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; T_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 5z \\ \mathrm{z - y - x} \\ 5x \end{pmatrix}$

   Encuentre la representación matricial de las siguientes transformaciones:

   a) $T_1 + T_2$

   b) $T_1 \circ T_2$

   c) $T_2 \circ T_1$

   d) $T_1 \circ T_1$

   e) $(T_1)_T$

VI – EIGENVALORES, EIGENVECTORES Y APLICACIONES.

1. En las siguientes matrices, calcular los eigenvalores y su respectivo espacio característico. Además, indicar la multiplicidad geométrica y algebraica de los eigenvalores.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determinar las siguientes matrices son diagonalizables y en caso afirmativo obtener la matriz P talque $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad d) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Eleve la matriz a la potencia indicada:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ A^{20} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B^{10}$$

OBS. Utilice la diagonalización de las matrices

4. Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^t AQ = D$, una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de A.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Escriba las siguientes ecuaciones cuadrática en la forma $A\,v\ \cdot v = d$, elimine el término "xy" rotando los ejes en un ángulo θ, reescriba la ecuación en términos de las nuevas variables e identifique el tipo de cónica que describe la ecuación.

   a) $4x^2 - 2xy + 4y^2 = 25$
   b) $xy = 1$
   c) $4x^2 - 8\sqrt{3}xy - 4y^2 = 1$
   d) $\frac{2x^2}{25} - \frac{72xy}{25} + \frac{23y^2}{25}$