I. CÁLCULO DE FUNCIONES: $\mathbb{R}^{n} \rightarrow \mathbb{R}^{m}$

1. Calcular las primeras derivadas parciales y los gradientes de las siguientes funciones
   a) $f(x,y,x) = \frac{x^2+z}{y}$
   b) $f(x,y,z) = xz + e^{y}\mathrm{x} + \mathrm{yco\,s}(x)$
   c) $f(x,y,x) = \frac{1}{x+y+z}$

2. Hallar la derivada direccional de la función en el punto dado y en la dirección del vector dado
   a) $f(x,y,z) = e^{z}\,\mathrm{ycos}(x)\,p_0 = (0,0,0)v = (1,-2,1)$
   b) $f(x,y,z) = xy + xz + xyzp_0 = (1,-1,0)v = (5,1,-3)$

3. Dibujar algunas curvas de nivel de las siguientes funciones
   a) $f(x,y) = x^2 + xy$
   b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$
   c) $f(x,y) = e^{xy}$

4. Calcular la ecuación del plano tangente a las superficies en los puntos indicados
   a) $x^2 + y + z^2 = 3p_0 = (0,2,1)$
   b) $x^2 - y^2 + z^2 = 0 \qquad p_0 = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)$
   c) $x^2 - y^2 + z^2 = 0p_0 = (1,0,5)$

5. Obtener el rotacional y la divergencia de los siguientes campos vectoriales
   a) $F = 3xi + 7yj - 4zk$
   b) $F = x^2 i + 5y^2 j - zk$
   c) $F = (x-y)i + (y+z)j + (z-x)k$
   d) $F = xi + xyj - 2zk$

6. Obtener el laplaciano de los siguientes campos vectoriales o escalares
   d) $f(x,y,x) = xyz + z^2$
   e) $f(x,y,z) = yz + e^{xzy}$
   f) $f(x,y) = ysin(x) + (x+y)^2$

II. VALORES EXTREMOS

1. Hallar y clasificar los valores extremos (si los hay) de las siguientes funciones
   a) $f(x,y) = x^3 + 3x + y^2$
   b) $f(x,y) = x - y + xy$
   c) $f(x,y) = (4-x)^2 + (1-y)^2$
   d) $f(x,y) = y^4 + 2x - y$

2. Hallar los primeros tres términos de la serie de Taylor de segundo orden de la función $f(x,y) = e^{xy} + ysin(x)$ alrededor de x=0 y y=0

3. Hallar los extremos de las funciones sujetas a las restricciones dadas
   a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y \quad sujeta\ a \quad x^2 + y^2 = 1$
   b) $f(x,y) = \frac{1}{xy} \quad sujeta\ a \quad x + y = \frac{3}{2}$
   c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y} \quad sujeta\ a \quad x + y = \frac{1}{3}$

4. Considérense todos los rectángulos con un perímetro fijo p. Utilizando los multiplicadores de Lagrange demostrar que el rectángulo con el área máxima es un cuadrado.

5. Con ayuda de los multiplicadores de Lagrange, resolver los siguientes problemas: (a) Hallar los tres números cuyo producto es 27 y cuya suma es mínima. (b) Hallar los tres números cuya suma es igual a 27 y cuyo producto es máximo.

6. Hallar los extremos de f sujeta a las restricciones dadas:
   a) $f(x,y,z) = x - y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
   b) $f(x,y) = 3x + 2y$, sujeta a $2x^2 + 3y^2 = 3$

7. Hallar los extremos relativos de f sujeta a la restricción S.
   a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2, S = \{(x,2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
   b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 - y^2, S = \{(x,\cos(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$
   c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2, S = \{(x,y,z) \mid z \geq 2 + x^2 + y^2\}$

8. Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por (-1,0) con una inclinación de 45° y sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Hallar los extremos de f sujeto a S

III. INTEGRACIÓN MÚLTIPLE Y CAMBIO DE VARIABLES

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:
   a) $\int_{-4}^{3}\int_{\pi}^{7\pi} x\ln(y)\,dydx$
   b) $\int_{3}^{6}\int_{4}^{5} x^3(y+3x)^2dydx$
   c) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} xye^{x^2+y^2}dydx$

2. Calcular el volumen de la región sobre el rectángulo [0,4]×[5,3] y bajo la gráfica de la función $z = x^2y$.

3. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0,2] \times [3,4]$ y las "caras verticales" de R.

4. Efectuar la integración indicada en la caja dada:

   a) $\iiint_B x^2yz^3dxdydz, B = [1,2] \times [3,4] \times [5,6]$
   b) $\iiint_B (3x + 2y + 5z)dxdydz, B = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$
   c) $\iiint_B \cos x \sin y \tan z\, dxdydz, B = [-\pi,\pi] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/4]$

5. Calcular el volumen del sólido limitado por $x^2 + 2y^2 = 2, z = 0, x + y + 2z = 2$.

6. Demostrar que la fórmula que usa integrales triples para calcular el volumen bajo la gráfica de una función positiva $f(x, y)$ definida en una región elemental D en el plano se reduce a la integral doble de f sobre D.

7. Sea f continua y sea B_c la bola de radio c centrada en el punto (x_0, y_0, z_0). Sea vol(B_c) el volumen de B_c. Probar que:

$$\lim_{c\to 0}\frac{1}{vol(B_c)}\iiint_{B_c} f(x,y,z)dV = f(x_0,y_0,z_0)$$

8. Sea D el disco unidad $x^2 + y^2 \leq 1$. Calcular por medio de un cambio de variable a coordenadas polares:

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$$

9. Sea D la región $0 \leq y \leq x$, y $0 \leq x \leq 1$. Calcular por medio del cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Comprobar el resultado por medio del cálculo directo de la integral resolviendo una integral iterada.

$$\iint_D (2x + 3y)dxdy$$

10. Calcular $\iint_D (x^2 + y^2)^{5/2} dxdy$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

11. Sea B la bola unidad. Calcular por medio de un cambio de variables apropiado:

$$\iiint_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

12. Sea W el sólido acotado entre las dos esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$. Calcular:

$$\iiint_W \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

13. Integrar $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ sobre la misma región W del ejercicio anterior.

IV. TEOREMAS DEL CÁLCULO VECTORIAL

1. Si una función f = f (x, y) se puede escribir en coordenadas polares / $r = r(\theta) \wedge \theta \; \varepsilon \; [\theta_1, \; \theta_2]$.

Demostrar entonces que:

$$P.D. \; \int_S f(x,y)\, dS \; = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, \; r\,sen\,\theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \, .$$

2. Calcular: $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$

Si:

$$\vec{F} = \; < e^{-x}, \; e^{-y/x}, \; e^{-z/x} > , \; c \; : \; \overrightarrow{r(t)} = \; < t, \; t^2, \; t^3 > \; \forall \; t \, \epsilon \, [\, 0, \infty).$$

3. Considerando la configuración más simple: un punto de carga en el origen. El campo eléctrico toma la forma:

a) Demuestre que **E** es un campo irrotacional.

$$\vec{E} = \; \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{q}{r^2} \, \hat{r}.$$

b) Demuestre que la integral de línea en el campo **E** es nula. Es decir, mostrar:

4. Considerando que el campo eléctrico es un campo conservativo, ¿cuál de los siguientes campos es físicamente imposible? Para el campo físicamente posible, determinar la función

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

f potencial tal que: $\boldsymbol{E} = -\nabla f$.

$$i) \; \vec{E} = k \, [xy \;\; \hat{x} + \; 2yz \;\; \hat{y} \; + \; 3xz \;\; \hat{z}] \, ,$$

$$ii) \; \vec{E} = k \left[y^2 \;\; \hat{x} + \; \left(2yx + z^2\right) \;\; \hat{y} \; + \; 2zy \;\; \hat{z}\right].$$

5. Sea D una región en la que el teorema de Green es válida, si suponemos que f es una función armonica en D: $\nabla^2 f = 0$. Comprobar:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx = 0.$$

6. Usando el teorema de Green, demostrar las siguientes identidades:

$$ii)\ \int_{\partial D}\left(Q\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx+\left(P\frac{\partial Q}{\partial y}-Q\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy=2\iint_D\left(P\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}-Q\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}\right)dA.$$

$$i)\int_{\partial D}PQ\,dx+PQ\,dy=\iint_D\left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+P\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right]dA.$$

7. Evaluar la integral de línea, usando el teorema de Stokes: $\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{S}$.

Suponiendo que la superficie S está orientada de manera positiva y S está definida por la intersección de:

$$c\ :\ z=\ 9-\left(y^2+x^2\right)\ \forall\, z\,\epsilon\,[\,0,9],\qquad \vec{F}=\ <x,\ y,\ y^2>.$$

8. Un globo de aire caliente la forma de una esfera de radio R y está trunca en uno de sus hemisferios. Si los gases escapan de la superficie según:

$$V(x,y,z)\ =\nabla\, x\,\phi\ /\ \phi\ =<\ -y,\ x>.$$

Considerando a la superficie que trunca a la esfera principal como una circunferencia de radio R/4, además, la esfera tiene un radio R = 5. Calcular el flujo de gas a través de la superficie dada.

9. Sea W una superficie limitada por: $z=\ e^{y^2+x^2}$, $1\le y^2+x^2\le 2.$

a) Encontrar el volumen de W.

b) Encontrar el flujo del campo **F** en W. Si: $\vec{F}=\ <x(2-y),\ -y,\ yz>.$

10. Demostrar las identidades de Green:

$$i)\iint_{\partial W}(f\nabla g)\cdot d\vec{S}=\iiint_W\left(f\nabla^2 g+\nabla g\nabla f\right)dV.$$

$$ii)\iint_{\partial W}(f\nabla g-g\nabla f)\cdot d\vec{S}=\iiint_W\left(f\nabla^2 g+g\nabla^2 f\right)dV.$$