I – OPERACIONES CON MATRICES

1. Dadas las siguientes matrices, calcular las operaciones indicadas en cada inciso.

   Si la operación no se puede realizar, indique por qué.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; E = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} \; F = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

   a) $A + 3B$
   b) $AB^t - A^tB$
   c) $AC - B^tC$
   d) $(BE)^t + DE$
   e) $D^t + F^2$

2. Dando uso a las matrices definidas en el ejercicio previo, encontrar la matriz X.

   a) $2A - X = B$
   b) $X - (BE)^t = 2E^t$
   c) $X + CF^2 = CD^t$
   d) $EE^t + X = A$

II – FORMAS REDUCIDAS

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Identifique las que se encuentran en forma escalonada.

   b) Identifique las que se encuentran en forma escalonada reducida.

2. Reducir las siguientes matrices a su forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 7 & 3 \\ 4 & -3 & 6 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & 0 & -6 \\ 5 & -2 & 2 & 14 & 10 \\ 6 & 4 & 9 & -8 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Utilizando operaciones elementales, encontrar la matriz inversa, si existe.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

III – SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Resolver los sistemas de ecuaciones utilizando el método indicado.

   a) $-3x - y = 5$; (Inversa de matriz de coeficientes)

      $2x + 3y = 6$

   b) $2x + 3y + z = 0$; (Elección libre)

      $x + 5y + 2z = 6$

      $3x - y + z = 2$

   c) $7x + 3y + 4z = 1$; (Gauss)

      $5x + y + 2z = 1$

      $9x + 4y + 3z = -1$

   d) $-7x + y + 2z = 0$; (Gauss – Jordan)

      $9x - y - 3z = 0$

      $2x + 4y - 7z = 0$

   e) $5w + 7x - y + 8z = 1$; (Elección libre)

      $7w + x + y - 3z = 11$

      $-w - 2x + 3y - z = 11$

      $w + x - y + 3z = -3$

IV – DETERMINANTES

1. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

   a) Encuentre los menores $M_{13}, M_{22}, M_{23} y\ M_{44}$ para la matriz A, y M_{31}, M_{32} para la matriz B.

   b) Calcule los cofactores C_{23}, C_{44} para la matriz A, y C_{31}, C_{32} para la matriz B.

2. Resolver para "x".

$$\begin{vmatrix} 4x & -2x & 3 \\ x & -5x & 2 \\ 2 & 4 & 2x \end{vmatrix} = -10x$$

3. Encontrar la matriz inversa, usando el determinante y la adjunta, para las siguientes matrices.

   a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

   b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

4. Calcular los siguientes determinantes utilizando propiedades.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

V – SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR DETERMINANTES

1. Resuelva el sistema de ecuaciones utilizando el método indicado.

   a) $2x - y + z = 3$; (Regla de Cramer)

      $2y - z = 1$

      $-x + y \quad = 1$

   b) $x + 3y - 3z = 0$; (Método Montante)

      $2x - y + z = 7$

      $3x - 4y - 2z = 1$

   c) $x + 2y + z = 1$; (Usando la inversa calculada por determinante)

      $2x - y - 2z = -1$

      $x + 5y + 3z = 2$

   d) $w + x - y + z = 0$; (Elección libre)

      $-2w - x + 2y - 5z = -5$

      $-3w + 2x + 3y + 6z = -1$

      $2w + x - y + z = 2$

2. Determinar los valores de "k" de modo que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones y sin solución.

   a) $x + y + kz = 2$

      $3x + 4y + 2z = k$

      $2x + 3y - z = 1$

   b) $kx + 2y + 6z = 0$

      $2x + ky + 4z = 2$

      $2x + ky + 6z = k - 2$

VI – FRACCIONES PARCIALES

1. Descomponer en fracciones parciales y comprobar el resultado.

   a) $\frac{3x+6}{(x-2)(x+4)}$

   b) $\frac{9x+7}{x^2+2x-3}$

   c) $\frac{3x^2-5x-52}{(x+2)(x-3)(x+5)}$

   d) $\frac{x^3+2x^2-1}{x^2+x-6}$

   e) $\frac{x^2+3x-2}{x^2(2x-1)}$

   f) $\frac{9x^3+16x^2+3x-10}{x^3(x+5)}$

   g) $\frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}$

   h) $\frac{2x^3-4x^2+4x-4}{(x^2+2)(x^2+1)}$

   i) $\frac{-10x^2-24x-48}{(x+2)(x-3)(x^2+x+2)}$

   j) $\frac{2x^4+4x^3+4x^2+x-6}{x^4+x^3+3x^2}$

   k) $\frac{2x^5+4x^3-3x^2+3x-1}{(x^2+1)^3}$

   l) $\frac{2x^5+9x^3+3x^2+5x+4}{x^6+2x^3+1}$

VII – FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

1. En cada uno de los incisos pasar a la forma logarítmica.
    a) $a^c = b$
    b) $x^2 = 9$
    c) $100^{3/2} = 1000$
    d) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2/3} = \frac{1}{9}$
2. En cada uno de los incisos pasar a la forma exponencial.
    a) $\log_2 x = k$
    b) $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$
    c) $\log_{\frac{1}{2}} x = 5$
    d) $\ln 5 = k$
3. Hallar los valores de "b" o "N", según corresponda:
    a) $\log_{10} \frac{1}{1000} = b$
    b) $\log_b 9 = -2$
    c) $\log_{32} N = \frac{1}{5}$
    d) $\ln N = -0.3218$
4. Trazar la gráfica de las siguientes funciones:
    a) $f(x) = 2^x$
    b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
    c) $f(x) = \log_{1/3} x$
    d) $h(x) = \ln x$

VIII – PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. En cada uno de los incisos, expresar el logaritmo dado en función de logaritmos de expresiones más sencillas.
   a) $\log_b \left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$
   b) $\log_b \frac{x(x+2)^2}{(x-2)^4}$
   c) $\log_b \sqrt{\frac{x(x-5)^3}{(x^2-3)(x^2+3)}}$
2. Dado que $\ln x = 1.2531, \ln y = 0.2278\ y\ \ln z = -2.8901$; encontrar el valor numérico de las siguientes expresiones:
   a) $\ln\left(\frac{x^2y}{z^3}\right)$
   b) $\log_x yz$
3. Encontrar la función inversa de:
   a) $f(x) = b^x$
   b) $g(x) = b^{\frac{x+2}{x}}$
   c) $h(x) = \log_b \frac{x}{x-1}$
   d) $w(x) = \log_b \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

IX – ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. Resolver para "x" y comprobar el resultado.
   a) $2^{x+2} = 4^{x-1}$
   b) $e^{2x} - 2e^{-2x} + 1 = 0$
   c) $2\ln x - \ln(5x-4) = 0$
   d) $\ln 12 - \ln(x-1) = \ln(x-2)$
   e) $\log_{10}(x+2) + 2\log_{10}(x+3) = 2$
   f) $e^{3x} - 2e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0$
   g) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$
   h) $e^{2x} - 2e^{x} - 5 + 6e^{-x} = 0$
2. Transformar la expresión dada en otra que no contenga logaritmos.
   a) $\ln x + \ln y = \ln 4$
   b) $\log_2 x - 3\log_2 y = 3$
   c) $2\ln x - \ln(z-2y) = \ln(z+2y)$
   d) $\ln(x+y-1) = \ln(x^2+xy+y^2) - \ln 2$
   e) $2\ln 2y + \ln(x-1) - x = 0$
3. Para $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, despejar "$n$" como función de $a_1, S_n\ y\ r$.
4. Para $A = P(1+r)^n$, despejar "n" como función de $A, P\ y\ r$.

X – PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

1. Existen 4 carreteras entres las ciudades A y B, y 3 carreteras entre las ciudades B y C. Hallar el número de formas diferentes de viajar de A a C, pasando por B.
2. Hallar el número de enteros de diferentes 3 cifras que pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 5, 7, 9, bajo las siguientes condiciones.
   a) No se permite repetición. Cuente los enteros pares en este caso.
   b) Se permite repetición.
3. Halle el valor de "n" o "r" si:
   a) $P(n,4) = 6P(n,2)$
   b) $2P(6,r) = 3P(5,r)$
   c) $C(n,5) = 2C(n,2)$
   d) $2C(6,r) = 3C(5,r)$
4. ¿De cuántas maneras puede escogerse un comité compuesto de 3 hombres y 2 mujeres de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres?
5. ¿Cuántos números mayores de 5000 de cuatro dígitos se pueden formar con las cifras 2,3,5 y 7?
   a) Si se permite la repetición de dígitos.
   b) Sin repetir ningún dígito.

6. ¿En cuántas formas diferentes pueden acomodarse 7 llaves diferentes en un llavero circular?

7. De cuántas maneras pueden arreglarse en un estante 4 libros de francés, 2 libros de alemán y 3 libros de español, de manera que los libros del mismo idioma permanezcan juntos.

XI – SUCESIONES Y SERIES

1. A partir de la fórmula explícita para la sucesión a_n, escriba los 4 primeros términos, calcule el $\lim_{n\to\infty} a_n$ y exprese si converge o diverge.

   a) $a_n = \frac{4n^2+1}{n^2-2n+3}$

   b) $a_n = \frac{3n^2+2}{n+4}$

   c) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

   d) $a_n = \frac{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1}$

2. Determinar si la serie dada converge o diverge. Justifique su respuesta.

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$

3. Hallar el intervalo de convergencia para:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \ln n}{n3^n}$

4. Hallar la serie de Taylor para las funciones dadas, alrededor del punto indicado. Encuentre también la serie de MacLaurin para cada inciso ($c = 0$).

   a) $f(x) = cos4x; c = \pi$

   b) $g(x) = xe^{x^2}; c = 2$

   c) $h(x) = \sin 2x\,; c = \frac{\pi}{3}$