I – DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Ecuación diferencial y clasificación de las ecuaciones diferenciales.
   b) Notación de Leibniz y notación prima.
   c) Representación de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de $n\text{–}\acute{e}simo$ orden con una variable dependiente y forma normal de esa ecuación.
   d) Solución de una EDO, intervalo de definición, curva solución, solución implícita y familias de soluciones.
   e) Sistemas de ecuaciones diferenciales.
   f) Problemas con valores iniciales, existencia y unicidad de una solución para dicho problema, y problema con valor en la frontera.
2. Establezca el orden de la EDO dada. Determine si la ecuación es lineal, o no lineal.
   a) $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$ b) $\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$
   c) $(\sin\theta)y'''-(\cos\theta)\,y'=2$ d) $\frac{d^2R}{dt^2}=-\frac{k}{R^2}$
3. Compruebe que la función indicada es una solución particular de la ecuación. Tome un intervalo "I" de definición apropiado para cada solución.
   a) $\frac{dy}{dt}+20y=24; y=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}$
   b) $y''+y=\tan x\,; y=-(\cos x)\ln(\sec x+\tan x)$
   c) $y''-6y'+13y=0; y=e^{3x}\cos 2x$
4. Determine los valores de "m" para que la función $y=e^{mx}$, sea una solución de la ecuación diferencial dada.
   a) $y''-5y'+6y=0$ b) $5y'=2y$
   c) $y'+2y=0$ d) $2y''+7y'-4y=0$

II – ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Campos direccionales.
   b) Ecuaciones diferenciales autónomas.
   c) Atractores y repulsores.
   d) Ecuación diferencial de primer orden separable.
2. Resuelva la ecuación diferencial dada por el método de separación de variables.
   a) $\frac{dy}{dx} = \sin 4x$
   b) $\sin 2x\, dx + 3y \cos^3 2x\, dy = 0$
   c) $dx + e^{2x} dy = 0$
   d) $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
   e) $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$
   f) $x(1+y^2)^{1/2} dx = y(1+x^2)^{1/2} dy$
   g) $y \ln x \frac{dx}{dy} = (\frac{y+1}{x})^2$
   h) $\frac{dS}{dr} = kS$
   i) $\frac{dP}{dt} = P - P^2$
   j) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$
3. Encuentre una solución explícita del problema con valores iniciales dados. Plantee la antiderivada no elemental en los incisos e) y f).
   a) $\frac{dx}{dt} = 4(x^2+1);\ x\left({}^{\pi}/_{4}\right) = 1$
   b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2-1};\ y(2) = 2$
   c) $\sqrt{1-y^2}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0;\ y(0) = {}^{\sqrt{3}}/_{2}$
   d) $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy;\ y(-1) = -1$
   e) $\frac{dy}{dx} = ye^{-x^2};\ y(4) = 1$
   f) $\frac{dy}{dx} = y^2 \sin x^2;\ y(-2) = {}^{1}/_{3}$

III – ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Funciones homogéneas.
   b) Algoritmo o método de solución de ecuaciones diferenciales homogéneas.
2. Compruebe si las siguientes funciones son homogéneas. En caso afirmativo, indique el grado.
   a) $f(x,y) = x^2y + xy^2$
   b) $g(x,y) = 2x^2y - x^3\cos\frac{x}{y} - y^3\sin\frac{x}{y}$
   c) $N(x,y) = x^3 - xy^2 + y^2$
   d) $M(x,y) = x + \sqrt{x^2 + y^2}$
   e) $g(x,y) = x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}$
   f) $T(x,y) = x^2\tan\frac{x}{y} - xy - 2\ln x + \ln y$
3. Encuentre una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales:
   a) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - 2xdy = 0$
   b) $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$
   c) $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$
   d) $xydx + (x^2 - 2y^2)dy = 0$
   e) $(x + 4y)y' - x + y = 0$
   f) $x^2\frac{dy}{dx} = y^2 + xy$

IV – ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Diferencial de una función de dos variables.
   b) Criterio para una diferencial exacta.
   c) Algoritmo o método de solución de una diferencial exacta.
   d) Factores integrantes.

2. Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. En caso afirmativo, resuelva.
   a) $(2x+y)dx-(x+6y)dy=0$
   b) $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$
   c) $(\sin y - y\sin x)dx+(\cos x + x\cos y - y)dy=0$
   d) $\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\sin 3x=0$
   e) $\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)dx=(1-\ln x)dy$
   f) $(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0$
   g) $\left(1-\frac{3}{y}+x\right)\frac{dy}{dx}+y=\frac{3}{x}-1$
   h) $x\frac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$

3. Resuelva el problema con valores iniciales.
   a) $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0;\ y(1)=1$
   b) $(e^x+y)dx+(2+x+ye^y)dy=0;\ y(0)=1$

4. Resuelva la ecuación diferencial dada, determinando un factor integrante adecuado.
   a) $(2y^2+3x)dx+2xydy=0$
   b) $y(x+y+1)dx+(x+2y)dy=0$
   c) $6xydx+(4y+9x^2)dy=0$

V – ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Ecuación diferencial lineal de primer orden (EDL). ¿Cuál en la forma estándar?
   b) Algoritmo o método de solución de una EDL de primer orden.
   c) EDL homogénea y no homogénea.
   d) Transitorio, función de entrada o de conducción, la salida o respuesta.
2. Determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición "I" de la solución y si hay términos transitorios en la solución.
   a) $\frac{dy}{dx} = 5y$
   b) $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$
   c) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$
   d) $y' + 2xy = x^3$
   e) $y' = 2y + x^2 + 5$
   f) $\frac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$
   g) $xy' + x(x+2)y = e^{-x}\sin 2x$
   h) $\cos x\frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 1$
3. Resuelva el problema con valores iniciales e indique el intervalo de máxima definición "I" de la solución.
   a) $\frac{dy}{dx} = x + 5y;\ y(0) = 3$
   b) $xy' + y = e^x;\ y(1) = 2$
   c) $y' + 4xy = x^3 e^{x^2};\ y(0) = -1$
   d) $L\frac{di}{dt} + Ri = E;\ i(0) = i_0$ (L, R, E, i_0 son constantes)
   e) $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m);\ T(0) = T_0$ (k, T_m, T_0 son constantes)
   f) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x;\ y(0) = -1$

VI – APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Si se supone que la rapidez de cambio de una población es una razón neta, es decir, la diferencia entre la tasa de natalidad y la de mortalidad. Determine un modelo para la población $P(t)$ si ambas tasas son proporcionales a la población presente al tiempo $t > 0$.
2. A partir de ese mismo concepto de rapidez neta, determine un modelo para la población $P(t)$ si la tasa de natalidad es proporcional a la población presente al tiempo t, pero la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población presente al tiempo t.
3. Para un circuito en serie con un resistor y un inductor, determine una ecuación diferencial para la corriente $i(t)$, si la resistencia es R, la inductancia es L y el voltaje aplicado es $E(t)$.
4. Para un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor, determine una ecuación diferencial que exprese la carga $q(t)$, si la resistencia es R, la capacitancia es C y el voltaje aplicado es $E(t)$.
5. Considere la caída de un paracaidista antes de que se abra el paracaídas, donde la resistencia del aire es cercana a una potencia de la velocidad instantánea $v(t)$. Determine la ecuación diferencial para la $v(t)$ de un cuerpo de masa m que cae, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.
6. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es $150°C$. Tres minutos después su temperatura es de $90°C$. ¿Cuánto tiempo le tomará al pastel enfriarse hasta la temperatura ambiente de $20°C$?
7. Una batería de $12 volts$ se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de ${}^{1}/_{2}\, henry$ y la resistencia es de $10 ohms$. Determine la corriente i, si la corriente inicial es 0.

VII – ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN "n"

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Problema con valores iniciales de $n-$ $\acute{e}simo$ orden para una EDL y problema con valores en la frontera.
   b) Operadores diferenciales, principio de superposición de ED homogéneas.
   c) Dependencia e independencia lineal de un conjunto de funciones, Wronskiano, conjunto fundamental de soluciones y solución general EH.
   d) Principio de superposición para ED no homogéneas, función complementaria y solución particular.
2. La familia de funciones que se proporciona es la solución general en el intervalo que se indica (compruebe). Encuentre un miembro de la familia que sea solución del PVI.
   a) $y = c_1e^x + c_2e^{-x}, (-\infty, \infty);\ y'' - y = 0, y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
   b) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}, (-\infty, \infty);\ y'' - 3y' - 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
   c) $y = c_1x + c_2x\ln x\,, (0, \infty);\ x^2y'' - xy' + y = 0,\ y(1) = 3,\ y'(1) = -1$
3. Determine si el conjunto de funciones es "li"sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.
   a) $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = 4x - 3x^2$
   b) $f_1(x) = 0, f_2(x) = x,\ f_3(x) = e^x$
   c) $f_1(x) = \cos 2x\,,\ f_2(x) = 1,\ f_3(x) = \cos^2 x$
4. Compruebe que las soluciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ED en el intervalo dado. Forme la solución general.
   a) $y'' - 4y = 0;\ \cosh 2x,\ \sinh 2x,\ (-\infty, \infty)$
   b) $4y'' - 4y' + y = 0;\ e^{x/2},\ xe^{x/2},\ (-\infty, \infty)$
   c) $x^2y'' + xy' + y = 0;\ \cos(\ln x),\ \sin(\ln x),\ (0, \infty)$

5. $y^{(4)} + y'' = 0;\ 1,\ x,\ \cos x\,,\ \sin x\,,\ (-\infty, \infty)$

VIII – REDUCCIÓN DE ORDEN

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los primeros principios de la reducción de orden y dé un ejemplo. Hacer lo mismo para explicar y ejemplificar cómo deducir la fórmula para encontrar una segunda solución de la ecuación diferencial.
2. La función indicada $y_1(x)$, es una solución de la ecuación diferencial dada. Use reducción de orden detalladamente para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.
   a) $y'' + 2y' + y = 0;\ y_1(x) = xe^{-x}$
   b) $y'' + 9y = 0;\ y_1(x) = \sin 3x$
   c) $y'' - y = 0;\ y_1(x) = \cosh x$
   d) $y'' - 25y = 0;\ y_1(x) = e^{5x}$
   e) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0;\ y_1(x) = x^2$
3. La función indicada $y_1(x)$, es una solución de la ecuación diferencial dada. Use la fórmula $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ para encontrar una segunda solución.
   a) $xy'' + y' = 0;\ y_1(x) = \ln x$
   b) $4x^2y'' + y = 0;\ y_1(x) = x^{1/2}\ln x$
   c) $x^2y'' - xy' + 2y = 0;\ y_1(x) = x\sin(\ln x)$
   d) $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0;\ y_1(x) = x^4$
   e) $(1 - x^2)y'' + 2xy' = 0;\ y_1(x) = 1$

IX – ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Ecuación auxiliar, qué forma toma la solución general para raíces reales y distintas, reales y repetidas, y para raíces complejas conjugadas.
   b) Método de los coeficientes indeterminados, operador diferencial y método de variación de parámetros.
2. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dada.
   a) $4y'' + y' = 0$ b) $y'' + 4y' - y = 0$
   c) $y'' - y' - 6y = 0$ d) $3y'' + 2y' = 0$
   e) $y'' + 8y' + 16y = 0$ f) $2y'' + 2y' + y = 0$
   g) $3y'' + 2y' + y = 0$ h) $2y'' - 3y' + 4y = 0$
3. Encuentre la solución general de la ED de orden superior dada.
   a) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
   b) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$
   c) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
4. Resuelva el problema con valores iniciales.
   a) $y'' + 16y = 0; y(0) = 2, y'(0) = -2$
   b) $\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$
   c) $4y'' - 4y' - 3y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 5$
   d) $y''' + 12y'' + 36y' = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -7$

X – ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS

1. Resuelva la ED dada usando coeficientes indeterminados (método de superposición).
   a) $y'' + 3y' + 2y = 6$
   b) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$
   c) $y'' + y = 2x \sin x$
   d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^{x}$
   e) $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$
2. Escriba la ED en la forma $L(y) = g(x)$, donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes. Si es posible, factorice L.
   a) $9y'' - 4y = \sin x$
   b) $y'' - 5y = x^2 - 2x$
   c) $y''' + 10y'' + 25y' = e^{x}$
   d) $y''' + 4y' = e^{x} \cos 2x$
3. Compruebe que el operador diferencial anula las funciones indicadas.
   a) $D^2 + 64;\ y = 2\cos 8x - 5\sin 8x$
   b) $2D - 1;\ y = 4e^{x/2}$
   c) $(D - 2)(D + 5);\ y = e^{2x} + 3e^{-5x}$
   d) $D^4;\ y = 10x^3 - 2x$
4. Resuelva el problema con valores iniciales (CI-método del anulador).
   a) $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x};\ y(0) = 1, y'(0) = 1$
   b) $y'' + y = 8\cos 2x - 4\sin x\,;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
5. Resuelva cada ED por medio de variación de parámetros.
   a) $y'' + y = \sec x$
   b) $y'' + y = \sec x \tan x$
   c) $y'' - y = \sinh 2x$
   d) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{x}}$

XI – TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Transformadas, kernel o núcleo de la transformada y transformación lineal.
   b) Orden exponencial, transformada inversa, transformada de una derivada, teoremas de traslación y función de Heaviside.
2. Encontrar $\mathcal{L}\{f(t)\}$ por definición.
   a) $f(t) = \begin{cases} -1, 0 \leq t < 1 \\ 1, \quad t \geq 1 \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} 0, \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \cos t, \quad t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
   c) $f(t) = te^{4t}$ d) $f(t) = t \sin t$
3. Use las transformadas de algunas funciones básicas para encontrar $\mathcal{L}\{f(t)\}$.
   a) $f(t) = 1 + t^2 + e^{4t} - 5\sin 3t$
   b) $f(t) = (t+1)^3 + \cos 5t$
4. Encontrar la transformada inversa de Laplace dada.
   a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$
   b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16} - \frac{s+1}{s^2+2} + \frac{s}{(s-2)(s-3)}\right\}$
5. Use transformadas de Laplace para resolver el problema con valores iniciales dado. Use tablas de transformadas si es necesario.
   a) $y' + y = t \sin t\,;\ y(0) = 0$
   b) $y'' + 9y = \cos 3t\,;\ y(0) = 2, y'(0) = 5$
   c) $y'' + y = \sin t\,; y(0) = 1, y'(0) = -1$
   d) $y' - y = te^t \sin t\,; y(0) = 0$

XII – APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Use la transformada de Laplace para resolver el sistema de ED dado.

a) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - t \\ x(0) = 1,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2x + 1 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y + 2 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - x + y = 0 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2. Resuelva el sistema para las condiciones dadas.

$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t) \\ L_2\dfrac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t) \end{cases}$$

$R = 5\Omega, L_1 = 0.01H, L_2 = 0.0125H, E = 100V, i_2(0) = 0\ e\ i_3(0) = 0.$

XIII – SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Exprese con sus palabras lo que entiende por los siguientes enunciados y dé un ejemplo de cada uno:
   a) Forma normal de un sistema de EL de primer orden y forma matricial de un sistema lineal.
   b) Vector solución, eigenvalores y matriz exponencial.
2. Escriba el sistema lineal en forma matricial.

   a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z + t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y - z - 3t^2 \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z + t^2 - t + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y + e^{-t}\sin 2t \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 9z + 4e^{-t}\cos 2t \\ \frac{dz}{dt} = y + 6z - e^{-t} \end{cases}$

3. Compruebe que el vector X es una solución del sistema dado.

   a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}; \quad X = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix} e^t$

   b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 7y \end{cases}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t}$

4. Determine la solución general del sistema dado.

   a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 9x - 3y \end{cases}$

5. Calcule e^{At} y e^{-At} si:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$