I – ÁLGEBRA DE VECTORES ($\mathbb{R}^3$)

1. Usar un sistema de mano derecha (dextrógiro) para ubicar los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,-3,1)$ y $C(-2,3,-1)$. Encuentre las distancias AB, AC y BC.

2. Sea $V_3 = \{\langle x,y,z\rangle | x,y,z \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de todos los vectores posición tridimensionales; calcule la magnitud de $a \in V_3$ si:

   a) $a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$

   b) $a = \langle 1,2,2\sqrt{5}\rangle$

3. Dados los vectores $a, b \in V_3$, calcule $a+b$, $a-2b$, $\|3a+2b\|$y los vectores unitarios correspondientes a "a" y a "b" para cada inciso.

   a) $a = \langle 2,1,-2\rangle$ y $b = \langle 1,3,0\rangle$ b) $a = 3i - j + 4k$ y $b = 5i + j$

   c) $a = \langle 5,-1,2\rangle$ y $b = \langle -1,1,2\rangle$ d) $a = i - 4j - 2k$ y $b = i - 3j + 4k$

4. Identifique la forma geométrica dada por la ecuación:

   a) $x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 4$ b) $z = -3$

5. Dados los vectores $a, b \in V_3$, halle dos vectores unitarios ortogonales a ambos. Compruebe.

   a) $a = \langle 1,0,4\rangle$ y $b = \langle 1,-4,2\rangle$ b) $a = \langle 2,-2,1\rangle$ y $b = \langle 0,0,-2\rangle$

   c) $a = \langle 2,-1,0\rangle$ y $b = \langle 1,0,3\rangle$ d) $a = \langle 0,2,1\rangle$ y $b = \langle 1,0,-1\rangle$

   e) $a = 3i - j$ y $b = 4j + k$ f) $a = -2i + 3j - 3k$ y $b = 2i - k$

6. Use el producto cruz para determinar el ángulo entre los vectores $a, b \in V_3$.

   a) $a = \langle 1,0,4\rangle$ y $b = \langle 2,0,1\rangle$

   b) $a = \langle 2,2,1\rangle$ y $b = \langle 0,0,2\rangle$

   c) $a = 3i + k$ y $b = 4j + k$

   d) $a = i + 3j + 3k$ y $b = 2i + j$

II – RECTAS Y PLANOS

1. Para cada uno de los incisos halle las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta.
   a) Pasa por $A(3,-2,4)$ y es paralela al vector $\langle 3,2,-1\rangle$.
   b) Pasa por $B(0,2,1)$ y $C(2,0,2)$.
   c) Pasa por $D(1,4,1)$ y es paralela a la recta $x = 2 - 3t$, $y = 4$, $z = 6 + t$.
   d) Pasa por $E(2,0,1)$ y es perpendicular a los vectores $\langle 1,0,2\rangle$ y $\langle 0,2,1\rangle$.
2. Establezca si las rectas son paralelas o perpendiculares o halle el ángulo entre ellas.
   a) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -6 + t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - 2s \\ z = -6 + s \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4 + s \\ y = -2s \\ z = -1 + 3s \end{cases}$
3. Halle la ecuación del plano dado.
   a) Plano que contiene al punto $A(1,3,2)$ con vector normal $\langle 2,-1,5\rangle$.
   b) Plano que contiene los puntos $B(1,-2,1)$, $C(2,-1,0)$ y $D(3,-2,2)$.
   c) Plano que contiene a $E(3,-2,1)$ y es paralelo al plano $x + 3y - 4z = 2$.
4. Halle la intercepción entre los planos dados (si existe) y dibuje uno de ellos.
   a) $2x - y - z = 4$ y $3x - 2y + z = 0$
   b) $3x + y - z = 2$ y $2x - 3y + z = -1$
5. Halle la distancia entre los objetos dados.
   a) El punto $A(1,3,0)$ y el plano $3x + y - 5z = 2$.
   b) Los planos $2x - y - z = 1$ y $2x - y - z = 4$.

III – CILINDROS Y SUPERFICIES

1. Dibuje las trazas apropiadas y luego bosqueje e identifique la superficie.

   a) $z = x^2$

   b) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

   c) $z = 4x^2 + 4y^2$

   d) $x^2 - \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$

   e) $z = \cos y$

   f) $z = 4 - x^2 - y^2$

   g) $x + y = 1$

   h) $x^2 + y^2 = 4$

   i) $9x^2 + z^2 = 9$

   j) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   k) $x^2 + z^2 = y$

   l) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 16$

2. Dibuje las trazas dadas en un único sistema coordenado tridimensional.

   a) $z = x^2 + y^2; x = 0, x = 1, x = 2$

   b) $z = x^2 + y^2; y = 0, y = 1, y = 2$

   c) $z = x^2 - y^2; x = 0, x = 1, x = 2$

   d) $z = x^2 - y^2; y = 0, y = 1, y = 2$

IV – CURVAS PARAMÉTRICAS PLANAS Y LONGITUD DE ARCO EN $\mathbb{R}^3$

1. Represente los valores de la función con valores vectoriales.
   a) $r(t) = \langle 3t, t^2, 2t - 1\rangle,\ t = 0,\ t = 1,\ t = 2$
   b) $r(t) = (4 - t)i + (1 - t^2)j + (t^3 - 1)k,\ t = -2,\ t = 0,\ t = 2$
   c) $r(t) = \langle \cos 3t\,, 2, \sin 2t - 1\rangle,\ t = -\frac{\pi}{2},\ t = 0,\ t = \frac{\pi}{2}$
2. Dibuje la curva trazada por la función con valores vectoriales dada.
   a) $r(t) = \langle 2\cos t\,, \sin t - 1\rangle$
   b) $r(t) = \langle 2\cos 3t + \sin 5t\,, 2\sin 3t + \cos 5t\rangle$
   c) $r(t) = \langle t, t^2 + 1, -1\rangle$
   d) $r(t) = \langle 2\cos t\,, 2\sin t\,, 3\rangle$
   e) $r(t) = \langle t\cos t\,, 2t, t\sin t\rangle$
   f) $r(t) = \langle 3\cos t\,, 3\sin t\,, t\rangle$
   g) $r(t) = \langle t + 2{,}2t - 1, t + 2\rangle$
   h) $r(t) = \langle t, 1{,}3t^2\rangle$
3. Dibuje la curva y halle la longitud de arco.
   a) $r(t) = \langle \cos t\,, \sin t\,, \cos 2t\rangle;\ 0 \le t \le 2\pi$
   b) $r(t) = \langle \cos t\,, \sin t\,, \sin t + \cos t\rangle;\ 0 \le t \le 2\pi$
   c) $r(t) = \langle t, t^2 - 1, t^3\rangle;\ 0 \le t \le 2$
   d) $r(t) = \langle t^2 + 1{,}2t, t^2 - 1\rangle;\ 0 \le t \le 2$

V – COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

1. Escriba en coordenadas cilíndricas la ecuación dada.

   a) $x^2 + y^2 = 16$
   b) $x^2 + (y-3)^2 = 9$
   c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   d) $y = 2x$
   e) $z = \sin(x^2 + y^2)$
   f) $z = e^{-x^2-y^2}$

2. Dibuje las gráficas de las ecuaciones cilíndricas.

   a) $z = r$
   b) $r = 2\sec\theta$
   b) $\theta = \frac{\pi}{4}$
   d) $z = \sqrt{4 - r^2}$
   e) $r = 4$
   f) $r = 6\sin\theta$
   g) $\theta = \frac{\pi}{3}$
   h) $r = 2\cos\theta$

3. Convierta el punto esférico (ρ, φ, θ) en coordenadas rectangulares.

   a) $(4, 0, \pi)$
   b) $(4, \frac{\pi}{2}, \pi)$
   c) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

4. Exprese la ecuación en coordenadas esféricas.

   a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
   b) $y = x$
   c) $z - 1 = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   d) $z = 0$
   e) $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$
   f) $z = 2$

5. Dibuje la gráfica de la ecuación esférica.

   a) $\rho = 2$
   b) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$
   c) $\theta = \frac{\pi}{4}$
   d) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$
   e) $\rho = 4$
   f) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

VI – FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. Describa y dibuje el dominio de la función.

   a) $f(x,y)=\frac{1}{x+y}$

   b) $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

   c) $h(x,y)=\ln(2+x+y)$

2. Calcule los valores de la función en los puntos indicados.

   a) $f(x,y)=x^2+y$; $f(2,1)$, $f(0,3)$

   b) $g(x,y)=x+3x^2y$; $g(2,0)$, $g(1,3)$

   c) $h(x,y)=\frac{3x}{x^2-y^2}$; $h(2,1)$, $h(3,0)$

   d) $w(x,y)=\sqrt{x+y^2}$; $w(3,1)$, $w(4,0)$

3. Dibuje las trazas indicadas y haga la gráfica de $z=f(x,y)$.

   a) $f(x,y)=x^2+y^2$; $z=1$, $z=4$, $z=9$, $x=0$

   b) $f(x,y)=x^2-y^2$; $z=0$, $z=1$, $y=0$, $y=2$

4. Dibuje una representación de contorno.

   a) $f(x,y)=x^2+4y^2$

   b) $f(x,y)=9-x^2-y^2$

   c) $f(x,y)=\cos\sqrt{x^2+y^2}$

VII – LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcule el límite indicado.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x^2y}{4x^2-y}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\cos xy}{y^2+1}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,0)} \frac{e^{xy}}{x^2+y^2}$

2. Muestre que el límite indicado no existe.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2}$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin x}{x^2+y^2}$

   d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

3. Demuestre que el límite indicado existe.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\sin y}{2x^2+y^2}$

4. Determine todos los puntos en los cuáles la función dada es continua.

   a) $f(x,y) = 4xy + \sin(3x^2y)$

   b) $g(x,y) = e^{3x-4y} + x^2 - y$

   c) $h(x,y) = \ln(3 - x^2 + y)$

   d) $w(x,y) = \tan(x + y)$

   e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$

5. Use coordenadas polares para hallar el límite indicado, si existe. Note que $(x,y) \to (0,0)$ es equivalente a $r \to 0$.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

VIII – DERIVADAS PARCIALES, DIFERENCIABILIDAD Y DIFERENCIAL TOTAL

1. Halle las derivadas parciales de primer orden de la función dada por definición. Calcule el valor en el punto indicado.
   a) $f(x,y) = x^2y - 4xy^2$; $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$
   b) $g(x,y) = 2x^3 + xy$; $\quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,1), \quad \frac{\partial g}{\partial x}(2,1)$
2. Halle las derivadas parciales que se indican.
   a) $f(x,y) = x^3 - 4xy^2 + 3y$; $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
   b) $g(x,y) = x^4 - 3xe^{4y} + 2\cos y$; $\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$
   c) $h(x,y,z) = \ln(xyz^2)$; $\quad h_{xx}, \quad h_{yyz}, \quad h_{xxyzz}$
3. Halle todos los puntos donde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e interprete gráficamente el significado de los puntos.
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   b) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
4. Determine si la función es diferenciable o no.
   a) $g(x,y) = 3xy + y^2$
   b) $h(x,y) = x^2y$
5. Halle el diferencial total de la función dada.
   a) $w(x,y) = \sin x + ye^x$
   b) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

IX – REGLA DE LA CADENA, DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTES

1. Use la regla de la cadena para hallar las derivada de $g'(t)$.

a) $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big); f(x,y) = x^2y - \sin y\,, x(t) = \sqrt{t^2+1}, y(t) = e^t$

b) $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big); f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, x(t) = \sin t\,, y(t) = t^2 + 2$

2. Establezca la regla de la cadena para la función compuesta general.
   a) $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$
   b) $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
3. Use diferenciación implícita para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.
   a) $3xz - z^3 + yz = 0$
   b) $xyz - 2y^2z^2 + \cos xy = 0$
4. Halle el gradiente de la función dada en el punto indicado.
   a) $f(x,y) = \sin(3xy) + y^2$; $A(\pi, 1)$
   b) $f(x,y) = x^2\sqrt{y^2+1}$; $B(2,0)$
   c) $f(x,y,z) = z^2e^{2x-y} - 4xz^2$; $C(1,2,2)$
5. Calcule las derivadas direccionales de la función en el punto dado, en la dirección del vector indicado.
   a) $g(x,y) = x^2y + 4y^2$; $A(2,1)$, $u = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$
   b) $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; $B(3,-4)$, u en la dirección de $\langle 3, -2 \rangle$
   c) $f(x,y) = \cos(2x - y)$; $C(\pi, 0)$, u en la dirección desde $D(\pi, 0)$ hasta $E(2\pi, \pi)$.
6. Halle las direcciones de cambio máximo y mínimo de la función en el punto dado, y los valores de máxima y mínima razón de cambio.
   a) $f(x,y) = x\cos 3y$; $A(-2, \pi)$
   b) $g(x,y) = y^2e^{4x}$; $B(0,-2)$

X – PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES A LAS SUPERFICIES

1. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.
   a) $z = x^2 + y^2 - 1; A(2,1,4)$
   b) $z = e^{-x^2-y^2}; B(1,1,e^{-2})$
   c) $z = \sin x \cos y; C(\frac{\pi}{2},\pi,-1)$
   d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}; D(8,-6,10)$
   e) $z = 6 - x^2 - y^2; E(1,2,1)$
   f) $z = x^3 + y^3 + \frac{x^2}{y}; F(2,1,13)$
   g) $z = \frac{4x}{y}; G(-1,4,-1)$
   h) $z = x^3 - 2xy; H(1,-1,3)$
2. Para cada uno de los incisos del ejercicio anterior encuentre una recta normal al plano, que pase por el origen, es decir: $O(0,0,0)$.

XI – EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. Halle todos los puntos críticos e intente clasificarlos si es posible.
   a) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   b) $g(x,y) = xy^2 - x^2 - y$
   c) $h(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2$
   d) $w(x,y) = y^3 + 4y^2 - 2xy + x^2$
   e) $v(x,y) = x \sin y$
   f) $u(x,y) = 6xy^2 - 2x^3y + y^2$
2. Halle todos los puntos críticos y analice gráficamente cada punto (use la tecnología si es preciso), clasificando cada punto.
   a) $f(x,y) = x^2 - \frac{4xy}{y^2+1}$
   b) $g(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
   c) $h(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$

XII – REGLA DE L´HOPITAL E INTEGRALES IMPROPIAS

1. Halle los límites indicados.

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

   b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

   c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^x}$

   d) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$

   e) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$

   f) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

   g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

   h) $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

2. Determine si la integral es impropia o no.

   a) $\int_0^2 x^{-2/5}\, dx$ b) $\int_{-2}^{2} \frac{5}{x} dx$ c) $\int_0^\infty x^{2/5} dx$

   d) $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x} dx$ e) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$ f) $\int_2^\infty \frac{7}{x} dx$

3. Determine si la integral converge o diverge. En caso de que converja, halle el valor de la integral.

   a) $\int_0^1 x^{-1/3}\, dx$

   b) $\int_1^\infty x^{-4/5} dx$

   c) $\int_5^{10} \frac{2}{\sqrt{x-5}} dx$

   d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{3x} dx$

   e) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-2)^2} dx$

   f) $\int_0^\infty \cos x\, e^{-\sin x} dx$