

I – ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

1. Verificar si los puntos sobre la recta $y = 3x - 2$ en \mathbb{R}^2 , forman un grupo Abelian. Esto es $B = \{(x, y) | y = 3x - 2, x \in \mathbb{R}\}$ con la suma en \mathbb{R}^2 .
2. Sea $(G, *)$ un grupo Abelian y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G . Se define el conjunto:
$$H * K = \{h \cdot k | h \in H, k \in K\}$$

Probar que $H * K$ es un subgrupo del grupo $(G, *)$.

3. En \mathbb{Z} consideramos las dos operaciones binarias definidas por:

$$a \bullet b = a + b - 8 \text{ y } a * b = a + b - ab$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa? Justificar, explicando por qué.

- a) \bullet es asociativa en \mathbb{Z} .
 - b) (\mathbb{Z}, \bullet) posee elemento neutro.
 - c) Cada elemento de \mathbb{Z} tiene elemento inverso con la Ley \bullet .
 - d) $*$ es distributiva respecto de \bullet .
 - e) $*$ es conmutativa en \mathbb{Z} .
4. Pruebe si los \mathbb{Z} bajo la multiplicación habitual es o no un grupo. Justifique su respuesta.
 5. Determinar si los siguientes conjuntos son grupos, bajo la suma usual de polinomios.

$$E = \{P(x): P(x) = ax^2 + bx + 1; a, b, \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \{P(x): P(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

6. En un anillo no conmutativo $(A, +, *)$ se define una operación $*$ como:
 $x * y = x * y - y * x$. Calcular $x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y)$.
7. Verificar si $(\mathbb{Z}_3, +, \circ)$ forman un campo. Elaborar la tabla.
8. Verificar si $(\mathbb{Z}_4, +, \circ)$ forman un campo. Elaborar la tabla.

II – ESPACIOS VECTORIALES (i)

1. Determine si el subconjunto H del espacio vectorial V es un subespacio de V , sobre \mathbb{R} .

a) $V = \mathbb{R}^3$, $H = H_1 \cap H_2$, con $H_1 = \{(x; y; z): x + 3y - 2z = 0\}$,
 $H_2 = \{(x; y; z): x - y + 3z = 0\}$.

b) $V = M_{nn}$; $H = \{S \in M_{nn}: S \text{ es simétrica}\}$

c) $V = P_{\leq 4}$; $H = \{p \in P_4: \text{grado } p = 4\}$

d) $V = P_{\leq n}$; $H = \{p \in P_n: p(0) = 1\}$

2. Hallar las dimensión de $H_1 \cap H_2$, y $H_1 \cup H_2$.

3. Determine si el conjunto de vectores dado forma una base, y describa al que espacio generan.

a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$,

b) En P_3 : $2x, x^3 - 3, 1 + x - 4x^3, x^3 + 18x - 9$.

c) En \mathbb{R}^3 : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Determine una base del espacio solución del sistema:

$$x - y - z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

4. Encontrar un número a tal que:

$$\dim \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ a \\ -1 \\ -5 \\ -14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 2.$$

III – ESPACIOS VECTORIALES (ii)

1. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases para un espacio vectorial V , y suponga que:

$$a_1 = 4b_1 - b_2, a_2 = -b_1 + b_2, a_3 = b_2 - 2b_3.$$

- a) Encontrar la matriz de cambio de base de B a A , y de A a B .
b) Encuentre las coordenadas de x referidas a la base B , donde:

$$x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$$

(Note que: $[x]_A = (3, 4, 1)$)

2. Encontrar $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que el subconjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ a-b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{Q}^3 , sea

linealmente dependiente.

3. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Encuentre una base para el subespacio W generado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

4. Encuentre una base para D_3 , el espacio vectorial de matrices diagonales de 3×3 . ¿Cuál es la dimensión de D_3 ? (Una matriz diagonal tiene ceros en todas partes, menos en la diagonal). El conjunto de matrices diagonales 3×3 es un subespacio de las matrices 3×3 , con la suma de matrices y multiplicación por un escalar.

5. Encuentre el rango y la nulidad de la matriz dada. Espacio de renglones y espacio de columnas para cada matriz según corresponda.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

IV – ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO (i)

1. Encuentre una base ortonormal en \mathbb{R}^4 que incluya los vectores dados, añadiendo los vectores linealmente independientes que faltan para completar, y luego, ortonormalizar usando el producto euclideo. ¿Se puede formar una matriz ortogonal? Si es posible, formarla.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre una base ortonormal en \mathbb{R}^3 que incluya el vector dado, añadiendo los vectores linealmente independientes que faltan para completar, y luego, ortonormalizar usando el producto euclideo. ¿Se puede formar una matriz ortogonal? Si es posible, formarla.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Demostrar que la función definida por $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ es un producto interno.
4. Encuentre una base ortonormal para el espacio vectorial dado.
- a) \mathbb{R}^2 , tomando la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$
- b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x - y - z = 0\}$ (plano que pasa por el origen en \mathbb{R}^3)
- Nota:** Obtener la base del plano.
- c) $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: x = z, y = w\}$
- d) $G = \{(1, 0, -2), (2, 1, -1), (-1, 3, 1)\}$

V – ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO (ii)

1. Calcular la norma de los siguientes vectores, según la norma indicada.

a) $(2, 4, -5)$ (Norma Euclidiana: $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$)

b) $(1, -3, 4, -8)$ (Norma Valor Absoluto: $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$)

c) $(2, 6, -1, 0)$ (Norma Infinita: $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_\infty = \max_i \{|x_i|\}$)

2. Sea V el espacio de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual

a 2. Sobre \mathbb{R} , ¿ $W = \{ax^2 + bx - 2a - b / a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V ?

3. Definamos el producto entre dos polinomios como:

$$\langle p q \rangle = \sum_{i=0}^2 p(i)q(i)$$

a) Obtener una base ortonormal de W .

b) Obtener la proyección sobre W de los polinomios:

$$P(x) = x^2 - x + 1 \text{ y } Q(x) = 3x - 2.$$

VI – TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Demuestre que las siguientes transformaciones son lineales.

a) Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices de 2×2 , defina:

$$T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2} \text{ como } T(A) = A + A^T, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ x + 2y \end{bmatrix}.$

c) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = x + 1.$

d) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x + z, y - z).$

e) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; T(x, y) = (x - 2y, x + y, x^2).$

2. Encuentre la representación matricial de la transformación lineal dada y encuentre su núcleo, imagen, nulidad y rango. Decir si la transformación lineal es un isomorfismo.

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 2x + y \end{pmatrix}$

b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + 2z \\ x - y + z \end{pmatrix}$

c) $T: P_2 \rightarrow P_1; T(a + bx + cx^2) = a + bx$

3. Obtener la matriz asociada a la transformación lineal, dadas las bases y un vector, verificar que $(T(v))_{B_2} = A_T(v)_{B_1}$.

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; T(x, y) = (x - y, 2x + y, 5x); B_1 = \{(1, -1), (0, -2)\};$

$$B_2 = \{(1, -4, 3), (5, 2, -2), (4, -7, 0)\}; v = (1, 2).$$

b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; T(x, y, z) = (x - y + z, x + y - z); v = (0, 1, 2);$

$$B_1 = \{(1, 0, 3), (2, 1, 8), (1, -1, 2)\}; B_2 = \{(2, -9), (1, 8)\}.$$

4. Escribir la matriz dada como el producto de matrices elementales e indicar geoméricamente que es lo que hacen.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

VII – EIGENVALORES Y EIGENVECTORES. APLICACIONES.

1. Determinar si cada una de las siguientes matrices es diagonalizable y en caso afirmativo obtener P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonalizable.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^tAQ = D$, una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de A .

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Escriba la ecuación cuadrática en la forma $Av \cdot v = d$. Eliminar el término xy , encontrando el ángulo de rotación θ de los ejes. Escribir la nueva ecuación en términos de los nuevos ejes, identificar la cónica y graficar.

a) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6 = 0$

b) $-x^2 + 2xy - y^2 = 0$

c) $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$