I – ÁLGEBRA DE VECTORES $(\mathbb{R}^3)$

1. Calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.
   a) $u = 3\mathrm{i} + 2\mathrm{j} - 4\mathrm{k}$; $v = -i + 5j - 3k$
   b) $u = i + 2j - 3k$; $v = -1i - 2j + 3k$
   c) $u = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{3}j + \frac{1}{4}k$; $v = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{1}{3}k$
2. Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después bosqueje cada par.
   a) $u = 2i + 3j$; $v = -1i + 2j$
   b) $u = i + j + k$; $v = 2i - 4j + 6k$
   c) $u = 3i + 2j - 6k$; $v = -4i + 3j - 2k$
3. Encuentre la distancia entre los puntos. Ubique los puntos en el espacio euclidiano.
   a) $A = (3, 8, -2)$; $B = (6, 0, 1)$
   b) $C = \left(-{}^{1}/_{3}, 3, -{}^{1}/_{2}\right)$; $D = (4, 2, 6)$
   c) $E = (2, 4, 1)$; $F = ({}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{4}, 1)$
4. Encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado.
   a) $A = 12i + 3j - 4k$ b) $B = < -1,\ 2, -3\ >$
5. Encuentre el producto cruz de los vectores dados.
   a) $u = < 2, 1, -3 >$; $v = < 3, -1, 4 >$
   b) $u = < {}^{1}/_{3},\ {}^{2}/_{3},\ {}^{1}/_{6} >$; $v = < 3, 2, 3 >$
6. Calcular:
   a) El volumen del paralelepípedo con vértices $P(5,4,5)$, $Q(4,10,6)$, $R(1,8,7)$ y $S(2,6,9)$, y de aristas $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$.
   b) El área del triángulo con vértices $A(2, -5,3)$, $B(-1,7,0)$ y $C(-4,9,7)$.

II – APLICACIONES DE VECTORES

1. Encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta indicada.
   a) Contiene a $A(10,-5,6)$ y $B(8,-2,-9)$.
   b) Contiene a $C({}^{3}/_{8}, {}^{2}/_{3}, -{}^{1}/_{2})$ y $D({}^{1}/_{3}, {}^{2}/_{11}, {}^{3}/_{7})$.
   c) Contiene a $E(6,5,-2)$ y $F(3,-8,-{}^{1}/_{2})$.
2. Encuentre la ecuación del plano.
   a) Que pasa por el punto $P(5,-2,4)$ y que tiene a $\hat{n} =< 1,6,-2 >$ como vector normal.
   b) Que es paralelo a los planos $x - y + z = 0, 2x + y - z - 5 = 0$; y contiene el punto $P(4,0,-2)$.
3. Determine la ecuación de la esfera que:
   a) Tiene centro en $C(-1,2,-5)$ y uno de sus diámetros tiene longitud 10.
   b) Tiene los puntos $A(-5,6,-2)\ \ y\ \ B(9,-4,0)$ como los extremos de uno de sus diámetros.
4. Determine el perímetro de los siguientes vértices e identifique el tipo de triángulo que forman.

a) Vértices en $A(2,-5,3),\ \ B(-1,7,0)\ \ y\ \ C(-4,9,7)$
b) Vértices en $D(3,5,6),\ \ E(-5,-2,-1)\ \ y\ \ F(2,4,-1)$

5. Encuentre el vector unitario en la dirección $\overrightarrow{P_1P_2}$.
   a) $P_1(5,3,2), \quad P_2(-2,4,0)$
   b) $P_1(3,8,-6), \quad P_2(4,-3,-2)$
   c) $P_1(4,-2,-7), \quad P_2(-3,-1,-6)$

III – BASES Y DEPENDENCIA LINEAL

1. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes. Justifique en cada caso.

   a) $< -2,3,5 >, < 3, -{}^{9}/_{2}, -{}^{15}/_{2} >$

   b) $< 3, 1, 4 >, < 2,1, 3 >, < 0, 0,0 >$

   c) $< 2, -1,4 >, < 4, -2,7 >$

   d) $< -2, 3 >, < 4,7 >$

   e) $< 1, -1, 2 >, < 4, 0, 0 >, < -2, 3, 5 >, < 7, 1, 2 >$

   f) $< -3, 4, 2 >, < 7, -1, 3 >, < 1, 1, 8 >$

2. Determine si los vectores $< 1,1,1 >, < 2,2,0 >$ y $< 3,0,0 >$ generan $\mathbb{R}^3$.

3. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales:

   a) $3x - 2y + 6z = 0$

   b) $2x + 2y + 3z - w = 0$

   $x - y + 2z + w = 0$

   $3x + 2y + z - 2w = 0$

   $x + y - 3z - 2w = 0$

   c) $x - y - z = 0$

   $2x - y + z = 0$

4. Para qué valores de λ los vectores forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$:

   $< \lambda, -{}^{1}/_{2}, -{}^{1}/_{2} >, < -{}^{1}/_{2}, \lambda, -{}^{1}/_{2} >$ y $< -{}^{1}/_{2}, -{}^{1}/_{2}, \lambda >$

5. Para qué valores de α los vectores $< \alpha, 1,0 >$, $< 1,0, \alpha >$ y $< 1 + \alpha, 1, \alpha >$ forman una base en $\mathbb{R}^3$.

IV – TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Determina si la transformación dada es lineal.

   a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{3\,x\,2}$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 2x \\ x-y & 4y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $T: \mathcal{M}_{2\,x\,2} \to P_3$; $T\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta$

   c) $T: R^3 \to R^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$

   d) $T: R^2 \to R^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

2. Encuentre el núcleo, la imagen, el rango y la nulidad de la transformación lineal dada.

   a) $T: R^2 \to R^2$; $T(x, y) = (x - 2y\ , -x + y)$

   b) $T: R^2 \to R^4$; $T(x, y) = (2x + y\ , x - 3y\ ,\ x\ ,\ y)$

   c) $T: R^2 \to R^2$; $T(x, y) = (3x - 2y\ , 5x + y)$

   d) $T: R^3 \to R^3$; $T(x, y, z) = (x - y + 2z\ ,\ 3x + y + 4z\ , 5x - y + 8z)$

   e) $T: R^4 \to R^3$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z + 3w \\ y + 4z + 3w \\ x + 6z + 6w \end{pmatrix}$

V – APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

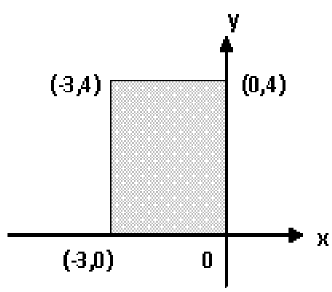
1. Describa con palabras las transformaciones lineales $T: R^2 \to R^2$ que tienen la representación matricial A_T.

   a) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ b) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

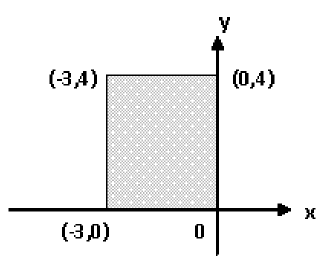
   c) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Escriba la representación matricial 2x2 de la transformación lineal dada, y bosqueje la región obtenida al aplicar esa transformación al rectángulo dado.

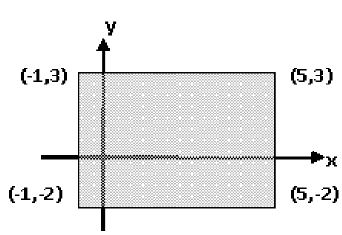
   a) Compresión a lo largo del eje X con $c = 1/4$.



   b) Corte a lo largo del eje Y con $c = 3$.



   c) Corte a lo largo del eje X con $c = 1/5$.



VI – VECTORES PROPIOS

1. Calcule los valores y vectores propios de la matriz dada, además el espacio generado para cada valor propio. Indique la multiplicidad algebraica de cada λ. Obtenga la matriz diagonal.

   a) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

VII – FUNCIONES VECTORIALES Y DERIVADAS PARCIALES

1. Encuentre las derivadas de las funciones vectoriales.
   a) $F(t) = e^t \cos t\, i + e^t \operatorname{sen} t\, j + e^t k$
   b) $H(t) = t\, i + (t^2 - 2t)j + 2(t-1)\, k$
   c) $W(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)i + (\operatorname{sen} t - t\cos t)j + 2k$
   d) $G(t) = e^{-t}\, i + e^{t} j + \sqrt{2}t\, k$
   e) $L(t) = t^2 i + \left(\frac{1}{3}\, t^3 + t\right) j + \left(\frac{1}{3}\, t^3 - t\right) k$
2. Grafique las curvas.
   a) $F(t) = ti + \frac{1}{2}\, t^2 j + \frac{1}{3}\, t^3 k$
   b) $G(t) = ti + t^2 j + 2t^3 k;\ 0 \le t \le 2$
   c) $H(t) = 2t\, i + \mathrm{t}^3 j + (t^2 - 1)k$
   d) $N(t) = t \operatorname{sen} t\ i + e^t j + \cos t\, k$
3. Calcule las derivadas parciales que se piden.
   a) v_z y v_t ; dado $v = \pi x^2 y$, $x = \cos z \operatorname{sen} t$, $y = z^2 e^t$
   b) u_r y u_s ; dado $u = x^2 + xy$, $x = r^2 + s^2$, $y = 3r - 2s$
   c) u_t y u_z ; dado $u = \operatorname{sen} xy$, $x = 2ze^t$, $y = t^2 e^{-z}$
   d) v_r, v_θ y v_μ; dado $v = xyz$, $x = r \operatorname{sen} \mu \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\mu$, $z = r\cos\theta$
   e) u_r y u_s ; dado $u = x^2 yz$, $x = \frac{r}{s}$, $y = re^s$, $z = re^{-s}$
4. Encuentre el plano tangente y la recta normal a:
   a) $x^2 + y^2 - 3z = 2$, $P_0(-2,-4,6)$
   b) $y = e^x \cos z$, $P_0(1, e, 0)$
   c) $z = e^{3x} \operatorname{sen} 3y$, $P_0(0, \frac{\pi}{6}, 1)$
   d) $zx^2 - xy^2 - yz^2 = 18$, $P_0(0,-2,3)$
5. Calcule el Diferencial Total de:
   a) $w = x \operatorname{sen} y - y \cos x$
   b) $w = xe^{2y} + e^{-y}$
   c) $w = \frac{xyz}{x+y+z}$
   d) $w = e^{yz} - \cos xz$

VIII – APLICACIONES DE DERIVADAS PARCIALES I

1. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ con el plano $x = 1$ en el punto $A(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete esta pendiente como una derivada parcial.
2. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 1$ en el punto $B(2, 1, 5)$. Dibuje la curva e interprete está pendiente como una derivada parcial.
3. La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa delgada es T grados, donde $T = 54 - 2x^2 - 4y^2$. Si la distancia se mide en centímetros, calcule la tasa de variación de la temperatura con respecto a la distancia recorrida a lo largo de la placa en las direcciones positivas de los ejes X y Y, respectivamente, en el punto $A(3, 1)$.
4. Un contenedor tiene la forma de un sólido rectangular y tiene una longitud interior de $8\ m$, un ancho interior de $5\ m$, una altura interior de $4\ m$ y un espesor de $4\ cm$. Emplea la diferencia total para aproximar la cantidad de material necesario APRA construir el contenedor.
5. Utilice la diferencia total para calcular aproximadamente el mayor error al determinar el área de un triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los catetos si ellos miden $6\ cm$ y $8\ cm$, respectivamente, con un error posible de $0.1\ cm$ para cada medición. También obtenga aproximadamente el error relativo.
6. En un instante dado, la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es de $10\ cm$ y crece a una razón de $1\ cm/min$, y la longitud de otro cateto es de $12\ cm$ y decrece a una razón de 2 cm /min. Calcule la razón de variación de la medida del ángulo agudo opuesto al cateto de $12\ cm$ en ese instante.

IX – APLICACIONES DE DERIVADAS PARCIALES II

1. Se introduce agua en un tanque que tiene forma de cilindro circular recto a una razón de $\frac{4}{5}\pi\ m^3/min$. El tanque se ensancha de modo que, aun cuando conserva su forma cilíndrica, su radio se incremente a una razón de $0.2\ cm/min$ ¿Qué tan rápido sube la superficie del agua cuando el radio es de $2\ m$ y el volumen del agua en el tanque es de $20\pi m^3$?
2. La altura de un cilindro circular recto disminuye a una razón de $10\ cm/min$ y el radio se incremente a una razón de $4\ cm/min$. Obtenga la razón de variación del volumen en el instante en que la altura es de $50\ cm$ y el radio de $16\ cm$.
3. La temperatura en cualquier punto de una placa rectangular situada en el plano xy es $T(x,y)$, donde $T(x,y) = 3x^2 + 2xy$. La distancia se mide en metros. Calcule la máxima tasa de variación de la temperatura en el punto $A(3,-6)$ de la placa. Determine la dirección para la cual ocurre esta tasa de variación máxima en $A(3,-6)$.
4. Determine los tres números positivos cuya suma sea 24 de modo que su producto sea el mayor posible.
5. Obtenga tres números positivos cuyo producto sea 24 de manera que su suma sea lo más pequeña posible.
6. Encuentre el punto del plano $3x + 2y - z = 5$ que esté más cerca del punto $A(1,-2,3)$, y calcule la distancia mínima.

X – SERIES DE TAYLOR

1. Halle la serie de Taylor para la función dada alrededor del punto indicado.
   a) $f(x) = e^{3x}$, $x = 2$
   b) $f(x) = sen\, x$, $x = {}^{\pi}/_{6}$
   c) $f(x) = \cos 4x$, $x = \pi$
   d) $f(x) = x^2 \ln x$, $x = 1$
   e) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, $x = 2$
   f) $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 3$